

Automatsko upravljanje

Analiza i sinteza linearnih kontinuiranih sustava



Bjelovar, 2013.

VISOKA TEHNIČKA ŠKOLA U BJELOVARU

AUTOMATSKO UPRAVLJANJE

Analiza i sinteza linearnih kontinuiranih sustava

Prvo izdanje



Bjelovar, 2013.

Zoran Vrhovski, mag.ing.el.techn.inf.

AUTOMATSKO UPRAVLJANJE
Analiza i sinteza linearnih kontinuiranih sustava

Nakladnik:
Visoka tehnička škola u Bjelovaru

Recenzenti:
Prof. dr. sc. Stjepan Bogdan
Mr. sc. Ivan Šumiga

Lektorica:
Valentina Purković, prof.

Crteži:
Zoran Vrhovski, mag.ing.el.techn.inf.

Tisak:
Croatiagraf d.o.o. Markovac Križevački, www.croatiagraf.hr
siječanj, 2013.

CIP zapis dostupan je u računalnom katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice
u Zagrebu pod brojem 825932.
ISBN 978-953-7676-15-5

Napomena:
Niti jedan dio knjige ne smije se preslikavati niti umnožavati bez prethodne
suglasnosti autora.

Zoran Vrhovski, mag.ing.el.techn.inf.

AUTOMATSKO UPRAVLJANJE

Analiza i sinteza linearnih kontinuiranih sustava

Drugo izdanje



Bjelovar, 2013.

Predgovor

*Fizikalni zakoni moraju
imati matematičku ljepotu.*
Paul Dirac

Ova knjiga iz Automatskog upravljanja namijenjena je prvenstveno studentima Stručnog studija mehatronike na Visokoj tehničkoj školi u Bjelovaru koji slušaju kolegij *Automatsko upravljanje*. Ova se knjiga može koristiti i na svim drugim veleučilištima i sveučilištima koja se u sklopu svog programa bave automatskim upravljanjem sustavima.

Osnovni je cilj ove knjige naučiti studente, ali i ostale koji će čitati i proučavati ovaj materijal, kako napraviti analizu i sintezu linearnih kontinuiranih sustava kroz niz praktičnih primjera. Knjiga sadrži devet poglavlja koja se bave analizom i sintezom linearnih kontinuiranih sustava. Svako poglavlje sadrži iscrpno teoretsko razmatranje potkrijepljeno s riješenim praktičnim primjerima.

Prvi dio knjige bavi se analizom sustava automatskog upravljanja gdje je analiza sustava primijenjena na osnovnim dinamičkim članovima pomoću kojih se mogu opisati složeniji sustavi. Nakon analize, knjiga se bavi sintezom sustava automatskog upravljanja s pregledom osnovnih regulatora te parametriranjem regulatora iskustvenim i praktičnim metodama.

Zahvaljujem se recenzentima prof.dr.sc. Stjepanu Bogdanu s Fakulteta elektrotehnike i računarstva te mr.sc. Ivanu Šumigi s Veleučilišta u Varaždinu na korisnim savjetima i sugestijama. Lektorici Valentini Purković zahvaljujem na strpljenju u čitanju ove knjige i usklađivanju teksta s hrvatskim standardnim jezikom.

Posebno se zahvaljujem Visokoj tehničkoj školi u Bjelovaru na financijskoj potpori bez koje ova knjiga ne bi bila moguća.

Knjigu posvećujem djevojci Ani zbog razumijevanja i podrške tijekom pisanja knjige te roditeljima Miloradu i Mirjani i bratu Josipu zbog podrške u obrazovanju i životu.

Zoran Vrhovski, mag.ing.el.techn.inf.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Osnovni pojmovi i definicije	5
2.1	Klasifikacija sustava	6
2.1.1	Linearni i nelinearni sustavi	7
2.1.2	Vremenski nepromjenjivi i vremenski promjenjivi sustavi	10
2.1.3	Kontinuirani i diskretni sustavi	12
2.1.4	Deterministički, nedeterministički i stohastički sustavi	14
2.1.5	Sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom (SISO) i sustavi s više ulaza i više izlaza (MIMO)	15
2.1.6	Sustavi s memorijom i sustavi bez memorije	17
2.1.7	Kauzalni i nekauzalni sustavi	18
2.2	LTI kontinuirani sustavi	19
2.3	Osnovne strukture sustava upravljanja	19
3	Matematički modeli linearnih kontinuiranih sustava	21
3.1	Opis linearnih sustava linearnim diferencijalnim jednadžbama	22
3.2	Opis sustava prijenosnom funkcijom u Laplaceovoj domeni	31
3.2.1	Laplaceova transformacija	31
3.2.2	Inverzna Laplaceova transformacija	35
3.3	Opis sustava varijablama stanja	42
4	Algebra blokova u sustavu automatskog upravljanja	49
4.1	Blok dijagrami	49
4.2	Algebra blokova	50
4.2.1	Serijsko povezivanje blokova	50
4.2.2	Paralelno povezivanje blokova	51

4.2.3	Povratna veza	52
4.2.4	Provlačenje sumacijske točke kroz blok	54
4.2.5	Provlačenje točke odvajanje kroz blok	55
4.2.6	Primjena algebre blokova na primjerima sustava automatskog upravljanja	56
5	Vremenski odziv osnovnih dinamičkih članova	61
5.1	Odziv sustava s obzirom na položaj polova	61
5.2	Proporcionalni član nultog reda (P0 član)	63
5.3	Proporcionalni član prvog reda (PT1 član)	65
5.4	Proporcionalni član drugog reda (PT2 član)	67
5.5	Proporcionalni član drugog reda s prigušenim oscilatornim ponašanjem (PT2S član)	70
5.6	Derivacijski član (D član)	75
5.6.1	Realni derivacijski član (DT1 član)	76
5.7	Integralni član	78
5.8	Član s transportnim kašnjenjem	80
6	Frekvencijski odziv osnovnih dinamičkih članova	83
6.1	Nyquistov dijagram	88
6.2	Bodeov dijagram	91
6.3	Frekvencijski odziv proporcionalnog člana nultog reda (P0 član)	99
6.3.1	Nyquistov dijagram P0 člana	99
6.3.2	Bodeov dijagram P0 člana	100
6.4	Frekvencijski odziv proporcionalnog člana prvog reda (PT1 član)	101
6.4.1	Nyquistov dijagram PT1 člana	101
6.4.2	Bodeov dijagram PT1 člana	102
6.5	Frekvencijski odziv proporcionalnog člana drugog reda (PT2 član)	103
6.5.1	Nyquistov dijagram PT2 člana	103
6.5.2	Bodeov dijagram PT2 člana	105
6.6	Frekvencijski odziv proporcionalnog člana drugog reda s prigušenim oscilatornim ponašanjem (PT2S član)	107
6.6.1	Nyquistov dijagram PT2S člana	107
6.6.2	Bodeov dijagram PT2S člana	109
6.7	Frekvencijski odziv derivacijskog člana (D član)	112
6.7.1	Nyquistov dijagram D člana	113

6.7.2	Nyquistov dijagram DT1 člana	113
6.7.3	Bodeov dijagram D člana	114
6.7.4	Bodeov dijagram DT1 člana	116
6.8	Frekvencijski odziv integralnog člana (I član)	116
6.8.1	Nyquistov dijagram I člana	117
6.8.2	Bodeov dijagram I člana	117
6.9	Frekvencijski odziv člana s transportnim kašnjenjem	118
6.9.1	Nyquistov dijagram člana s transportnim kašnjenjem	118
6.9.2	Bodeov dijagram člana s transportnim kašnjenjem	119
7	Analiza stabilnosti sustava automatskog upravljanja	121
7.1	Algebarski kriteriji stabilnosti	125
7.1.1	Hurwitzov kriterij stabilnosti	125
7.1.2	Routhov kriterij stabilnosti	129
7.2	Frekvencijski kriteriji stabilnosti	135
7.2.1	Nyquistov kriterij stabilnosti	135
7.2.2	Određivanje stabilnosti pomoću Bodeovog dijagrama	146
8	Sinteza regulacijskog kruga sustava automatskog upravljanja	151
8.1	Zahtjevi sinteze sustava automatskog upravljanja	152
8.1.1	Zahtjevi u vremenskom području	153
8.1.2	Zahtjevi u frekvencijskom području	156
8.1.3	Zahtjevi na pogrešku slijeđenja - kriteriji optimalnosti	157
8.2	Osnovna struktura sustava automatskog upravljanja	160
8.3	Sustav upravljanja	163
8.4	Regulator	165
8.4.1	P regulator	166
8.4.2	PI regulator	168
8.4.3	PID regulator	170
8.4.4	PD regulator	173
8.5	Aktuator (Izvršni član)	174
8.6	Senzor (Mjerni član)	175
8.7	Parametriranje osnovnih inačica regulatora	175
8.8	Ziegler-Nicholsova metoda parametriranja regulatora	176
8.8.1	Parametriranje regulatora Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti	176

8.8.2	Parametriranje regulatora Ziegler-Nicholsovom metodom prijelazne funkcije	184
8.9	Parametriranje regulatora metodom tehničkog optimuma	189
8.10	Kaskadni sustav upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog motora s permanentnim magnetima	195
8.10.1	Matematički model istosmjernog motora s permanentnim magnetima	195
8.10.2	Mjerenje brzine vrtnje korištenjem inkrementalnog enkodera . . .	198
8.10.3	DC-DC pretvarač u funkciji aktuatora	201
8.10.4	Sinteza kaskadnog sustava upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog motora	203
9	PRILOZI	209
9.1	Laplaceova transformacija	209
9.1.1	Tablica Laplaceove transformacije	211
9.2	Primjena Matlab& <i>SIMULINK</i> -a u analizi sustava automatskog upravljanja	212
9.2.1	Realizacija matematičkog modela sustava u <i>SIMULINK</i> - u . . .	217
	Bibliografija	223
	Indeks	227

Poglavlje 1

Uvod

Automatsko upravljanje područje je znanosti koje se bavi upravljanjem suvremenih tehnoloških sustava. Ovo područje znanosti zahtijeva dobro poznavanje matematike, signala i sustava, fizike i drugih tehničkih nauka. Sustavi automatskog upravljanja su tehnički dinamički sustavi koji bez prisustva čovjeka (tehnologa) realiziraju željenu radnju (npr. dovođenje alata robota iz jedne točke u neku drugu točku, upravljanje brzinom vrtnje elektromotora, regulacije temperature prostorije i dr.). Poboljšanje kvalitete proizvoda, smanjenje utroška energije, smanjenje emisije štetnih plinova, povećanje sigurnosti samo su neke od prednosti koje donosi upravljanje sustavima.

Osnovni razlozi za uvođenje automatizacije općenito su gospodarske prirode, ali isto tako, mnogi su procesi previše brzi ili složeni da bi ih čovjek mogao pratiti svojim osjetilima i istovremeno njima upravljati. Mnogi su sustavi opasni po život, stoga je automatizacija takvih postrojenja i više nego potrebna kako se ne bi narušili život i zdravlje radnika.

Knjiga koju čitate na jednostavan način opisuje osnove automatskog upravljanja. Pri tome se koristi poprilično jak matematički alat, ali do u detalje objašnjen na jednostavnim primjerima iz svijeta sustava upravljanja. U ovom uvodnom poglavlju proći ćemo ukratko kroz sva poglavlja ove knjige kako bi zainteresirali čitatelje, a to su na prvom mjestu studenti Stručnog studija Mehatronike Visoke tehničke škole u Bjelovaru.

U drugom poglavlju opisani su osnovni pojmovi kao što je dinamički sustav te klasifikacija sustava. Opisane su pojedine vrste sustava pri čemu se najveća pažnja pridaje dinamičkim tehničkim sustavima. Nadalje, opisana je podjela sustava s obzirom na matematički model nužan za njihov opis, svojstvo signala i parametara, broj ulaznih i izlaznih signala i drugo. Nama će od najveće zanimljivosti biti sustavi koji su linearni, vremenski nepromjenjivi, kontinuirani, deterministički, koji imaju koncentrirane parametre i koji su kauzalni. Sustavi ovakvih svojstava zanimljivi su iz razloga što za njih postoje razne metode analize i sinteze sustava upravljanja i što se iste metode mogu uvjetno primijeniti na ostale sustave.

U trećem poglavlju opisat ćemo matematičke alate za opis sustava, a to su diferen-

cijalne jednadžbe, prijenosna funkcija dobivena Laplaceovom transformacijom te opis sustava varijablama stanja. Sustave u opisu varijablama stanja opisat ćemo ukratko. Svi tehnički sustavi koji posjeduju svojstvo memorije (pohrane energije) mogu se opisati diferencijalnim jednadžbama n -tog reda gdje je red sustava jednak broju spremnika energije u sustavu. Spremnici energije su kondenzatori, zavojnice, zamašne mase, opruge, prigušnice, spremnici tekućine i slično. Opisat ćemo metode rješavanja diferencijalnih jednadžbi i uočiti da za veliki red sustava one postaju računski složene. Zbog toga je uvedena Laplaceova transformacija kojom se diferencijalne jednadžbe transformiraju u algebarske jednadžbe kojima je vrlo jednostavno manipulirati. Nakon algebarske manipulacije radi se inverzna Laplaceova transformacija te se dobije vremensko rješenje odziva (izlaza) sustava u ovisnosti o pobudi (ulazu) sustava. Znanja stečena u trećem poglavlju bit će dovoljna za početak vremenske i frekvencijske analize sustava upravljanja.

U četvrtom poglavlju opisat ćemo blokovsku algebru sustava upravljanja. S obzirom da su sustavi upravljanja sastavljeni od pojedinih podustava, potrebno je proučiti na koji način podsustavi djeluju jedan na drugi. U ovom poglavlju dolazimo do najbitnijeg pojma u automatskom upravljanju, a to je negativna povratna veza kojom je omogućeno upravljanje sustava u zatvorenom regulacijskom krugu.

U petom poglavlju opisat ćemo vremenski odziv osnovnih dinamičkih članova temeljen na znanjima stečenim iz prethodnog poglavlja. Najprije ćemo definirati osnovne vrste odziva sustava s obzirom na položaj polova (karakterističnih vrijednosti) sustava. Odziv sustava ovisi o vrstama sustava (o vrstama dinamičkih članova). Opisat ćemo proporcionalne članove nultog, prvog i drugog reda te proširiti znanja na sustave n -tog reda. Najzanimljiviji je član u opisu sustava automatskog upravljanja proporcionalni član drugog reda s prigušenim oscilacijama (PT2S član). Razlog tomu je njegova učestalost i najčešća aproksimacija sustava višeg reda PT2S članom čime se pojednostavljuje sinteza regulacijskog kruga. Bitno je da se opiše dominantna dinamika sustava višeg reda PT2S članom. Osim proporcionalnih članova, opisat ćemo i derivacijske (idealne i realne), integralne članove te članove s transportnim kašnjenjem. Razumijevanje vremenskog odziva bitno je zbog parametriranja sustava automatskog upravljanja kako bi se dobila željena vremenska vladanja sustava.

U šestom poglavlju opisat ćemo frekvencijski odziv osnovnih dinamičkih članova. Za frekvencijski odziv koristit ćemo dva najčešće korištena grafička aparata, a to su Nyquistov dijagram i Bodeov dijagram. Frekvencijska analiza dinamičkih sustava najčešće je korišteni aparat pri analizi i sintezi sustava automatskog upravljanja zbog jednostavnog snimanja frekvencijske karakteristike. Znanja usvojena u frekvencijskoj analizi osnovnih dinamičkih sustava lako ćemo proširiti na sustave n -tog reda. Vremenski i frekvencijski odziv povezani su pokazateljima kvalitete u vremenskom i frekvencijskom području.

U sedmom poglavlju opisat ćemo analizu stabilnosti sustava automatskog upravljanja i to algebarskim metodama i frekvencijskim metodama. Algebarske metode temelje se na poznavanju karakteristične jednadžbe sustava, dok se frekvencijske metode temelje na poznavanju frekvencijskih karakteristika sustava opisanih u šestom poglavlju. Stabilnost sustava svakako je bitna kod sinteze regulacijskih krugova.

Sva dosad opisana poglavlja zapravo su priprema za ono što je cilj automatskog upravljanja, a to je sinteza regulatora (regulacijskog člana) koja je opisana u osmom poglavlju. Opisani su osnovni tipovi regulatora, procesa, mjernih članova i aktuatora. Parametriranje regulatora ovisi o zahtjevima na sustav. Postoje iskustvene metode parametriranja od kojih ćemo opisati dvije metode Ziegler-Nicholsa, ali naravno i matematičke metode parametriranja kako bi se ostvarilo željeno ponašanje sustava (željeni pokazatelji kvalitete). Sinteza sustava prikazat će se na sustavu peći s grijačem te na sustavu istosmjernog motora s permanentnim magnetima.

U devetom poglavlju (PRILOZI) nalaze se svojstva važnih matematičkih alata korištenih u analizi i sintezi sustava automatskog upravljanja. Prikazan je način korištenja simulacijskog paketa Matlab & *SIMULINKA* u analizi i sintezi sustava automatskog upravljanja.

Sadržaj ove knjige bitan je kako bismo razumjeli teoriju upravljanja kontinuiranim sustava. Nastavak na upravljanje kontinuiranim sustava je upravljanje kontinuiranim sustavima pomoću diskretnih regulatora. Sinteza diskretnih regulatora spada u teoriju diskretnih sustava upravljanja, a ona ovdje nije obuhvaćena.

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi i definicije

Procesi upravljanja mogu se sresti svuda oko nas. Ljudski mozak upravlja temeljnim životnim procesima kao što su disanje, probava, rad srca, mišići, pokreti i ostali procesi u ljudskom tijelu. Prilikom odvijanja cestovnog prometa, čovjek upravlja automobilom, autobusom ili nekim drugim cestovnim vozilom na način da stigne do željenog odredišta, a da pritome ne ugrozi ničiji život.

Pod pojmom upravljanje podrazumijeva se skup akcija kojima se djeluje na objekt upravljanja (sustav) da bi se ostvario određeni cilj. Objekti upravljanja mogu biti električni strojevi i uređaji, motorna vozila, banke, poduzeća, nuklearne elektrane i dr.

Dio znanosti koji se bavi općim zakonitostima procesa upravljanja, reguliranja, dobivanja, pohranjivanja, pretvorbe i prijenosa informacija u sustavima neovisno o njihovoj prirodi naziva se kibernetika. Tehnička kibernetika je znanost koja se bavi upravljanjem tehničkim sustavima i upravljanjem pomoću tehničkih sustava.

Upravljanje najčešće obavlja neki tehnički uređaj. Automatsko upravljanje je upravljanje sustavima bez neposrednog djelovanja čovjeka. Osim pojma automatskog upravljanja postoji i pojam automatske regulacije koja podrazumijeva držanje neke varijable stanja (veličine) konstantnom kao što su struja, napon, brzina vrtnje, temperatura i dr. Automatsko upravljanje, osim automatske regulacije, obuhvaća samopodešenje, optimiranje i dr. Općenitiji pojam od automatskog upravljanja je vođenje koje osim automatskog upravljanja obuhvaća i elemente zaštite i signalizaciju.

U prethodnom tekstu, kao i u svakodnevnom razgovoru može se čuti riječ sustav. Pojam sustav ima različit smisao u pojedinim područjima znanosti. Iz tog razloga postoji mnogo definicija sustava [1]:

Websterov rječnik: „Sustav je skup objekata objedinjenih nekim oblikom međudjelovanja ili međuovisnosti.“

Vladimir Kučera: „Sustav je dio svijeta koji je povezan s okolinom preko ulazno izlaznih djelovanja. Ulazna (pobuda) djelovanja sustav preoblikuje u izlazna (odzivna) djelovanja. Izlaz sustava općenito može ovisiti o trenutku pobude i o "memoriji" sustava do trenutka pobude. Povijest, odnosno "memorija" sustava tretira se konceptom stanja

sustava.“

Uz navedene definicije sustava mogu se uklopiti mnogi sustavi kao što su:

- tehnički
- biološki
- ekonomski
- informacijski
- transportni i sl.

U daljnjem razmatranju sustava pod pojmom sustav podrazumijeva se dinamički tehnički sustav.



Slika 2.1: Sustav kao događaj koji izaziva promjenu stanja

Pod sustavom općenito, podrazumijeva se događanje koje izaziva promjenu stanja materije, energije ili informacije. Iz toga slijedi još jedna definicija sustava:

Sustav je događanje kroz koje se mijenja stanje materije, energije ili informacije. Ovu promjenu stanja može se shvatiti kao prijelaz iz početnog stanja u konačno stanje (slika 2.1).

Tehničke sustave srećemo svuda: u automobilskoj industriji, prehrambenoj industriji, industriji obrade kovina, drvnoj industriji i drugdje.

2.1 Klasifikacija sustava

Sustave je moguće klasificirati prema:

- matematičkom modelu nužnom za njihov opis
- svojstvu signala i parametara
- broju ulaznih i izlaznih signala i sl.

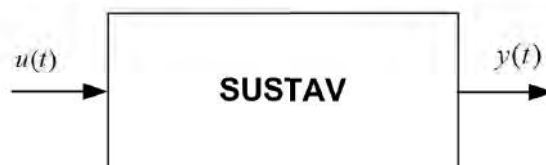
Sustavi se mogu podijeliti s obzirom na:

- Zakonitosti vladanja
 - Linearni sustavi

- Nelinearni sustavi
- Ponašanje u vremenu
 - Vremenski promjenjivi sustavi
 - Vremenski nepromjenjivi sustavi
- Signal u vremenu
 - Kontinuirani sustavi
 - Diskretni sustavi
- Svojstva signala
 - Deterministički sustavi
 - Nedeterministički sustavi
 - Stohastički sustavi
- Broj pobuda i odziva
 - SISO sustavi (Single input, single output)
 - MIMO sustavi (Multiple input, multiple output)
- Memoriju
 - Sustavi s memorijom
 - Sustavi bez memorije
- Kauzalnost
 - Kauzalni sustavi
 - Nekauzalni sustavi

2.1.1 Linearni i nelinearni sustavi

Na slici 2.2 prikazan je sustav s ulazom $u(t)$ i izlazom $y(t)$. Varijabla $u(t)$ prdstavlja pobudu sustava, a varijabla $y(t)$ odziv sustava. Neka sustav sa slike 2.2 za ulazni signal $u_1(t)$ proizvodi izlazni signal $y_1(t)$, a za ulazni signal $u_2(t)$ proizvodi izlazni signal $y_2(t)$. Sustav će biti **linearan** ako za ulazni signal $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ proizvede izlazni signal $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, gdje su α i β proizvoljne konstante.



Slika 2.2: Prikaz sustava

Linearni sustavi, dakle, zadovoljavaju matematička svojstva:

- aditivnost: $y(t) = f(u_1(t) + u_2(t)) = f(u_1(t)) + f(u_2(t))$ za svaki u_1 i u_2 u domeni funkcije $f(\cdot)$.
- homogenost: $f(\alpha u(t)) = \alpha f(u(t))$ za svaki $u(t)$ u domeni funkcije $f(\cdot)$ i za svaki $\alpha = \text{const.}$

Ako sustav ne zadovoljava svojstva aditivnosti i/ili homogenosti, sustav je **nelinearan**. Kažemo da je sustav **nelinearan** ako nije **linearan**.

Provjerimo sada linearnost za sustav opisan jednadžbom:

$$y(t) = 10u(t). \quad (2.1)$$

U jednadžbu (2.1) uvrstimo sada $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 10u_1(t), y_2 = 10u_2(t) \\ y(t) &= 10u(t) = 10(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)) \\ y(t) &= 10\alpha u_1(t) + 10\beta u_2(t) = \alpha 10u_1(t) + \beta 10u_2(t) \\ y(t) &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Prema relaciji (2.2), za ulazni signal $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ sustav (2.1) proizvede izlazni signal $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, gdje su α i β proizvoljne konstante. Zaključujemo da je sustav linearan.

Provjerimo linearnost još jednog sustava, koji je opisan jednadžbom:

$$y(t) = (u(t))^2. \quad (2.3)$$

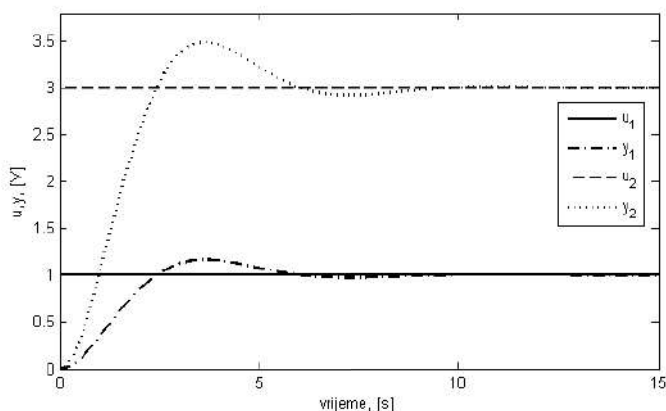
U jednadžbu (2.3) uvrstimo sada $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_1 &= (u_1(t))^2, y_2 = (u_2(t))^2 \\ y(t) &= (u(t))^2 = (\alpha u_1(t) + \beta u_2(t))^2 \\ y(t) &= \alpha^2 (u_1(t))^2 + 2\alpha\beta u_1(t)u_2(t) + \beta^2 (u_2(t))^2 \neq \\ &\neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha (u_1(t))^2 + \beta (u_2(t))^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Prema relaciji (2.4), za ulazni signal $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ sustav (2.3) ne proizvede izlazni signal $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, gdje su α i β proizvoljne konstante. Zaključujemo da je sustav nelinearan.

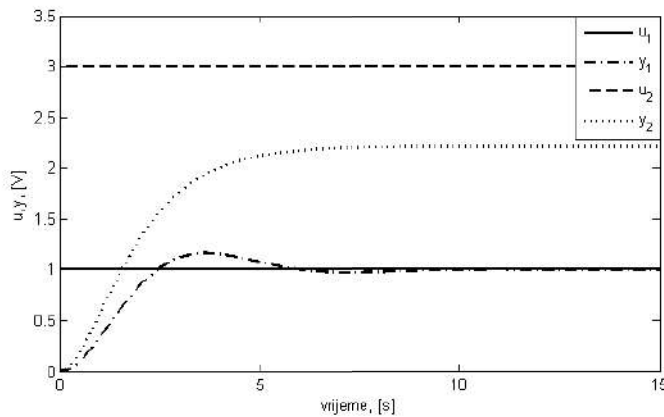
Linearne dinamičke sustave možemo opisati linearnim diferencijalnim jednadžbama koje zadovoljavaju svojstva homogenosti i aditivnosti. Dakle, sustav opisan diferencijalnom jednadžbom $3\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = u(t) + 2\dot{u}(t)$ je linearan jer linearna diferencijalna jednadžba zadovoljava svojstva aditivnosti i homogenosti. Sustav opisan diferencijalnom jednadžbom $\cos(y(t))\dot{y}(t) + y(t) = \sin(t)u(t)$ nije linearan (nelinearan je) jer diferencijalna jednadžba ne zadovoljava svojstva aditivnosti i homogenosti.

Prema navedenim svojstvima linearnih sustava dolazimo do zaključka da za linearne sustave vrijedi načelo: ako se ulazna veličina sustava smanji/poveća k puta, izlazna veličina sustava također će se smanjiti/povećati k puta. Ovo načelo potkrijepit ćemo sljedećim slikama. Na slici 2.3 prikazan je odziv sustava za dvije različite ulazne veličine. Sa slike se može vidjeti da ako se ulazna veličina poveća tri puta i izlazna veličina će se povećati tri puta. Ovo vrijedi i u dinamičkom dijelu odziva i u statičkom dijelu odziva. Za sustav sa slike 2.3 kažemo da je linearan. Često se u mnogim tehničkim sustavima nalaze pojačala snage koja su u načelu tranzistorska. Znajući karakteristiku tranzistorskog pojačala, poznato je da tranzistor za ulazne veličine veće od maksimalne ulazi u zasićenje. Primjer odziva jednog takvog sustava dan je na slici 2.4. Za male vrijednosti ulazne veličine sustav je linearan. Ako ulaznu veličinu povećamo tri puta, odziv sustava nije se povećao tri puta jer nije moguće u sustav unijeti onoliko energije koliko je to ulaznom veličinom zahtijevano. Za takav sustav kažemo da je nelinearan.

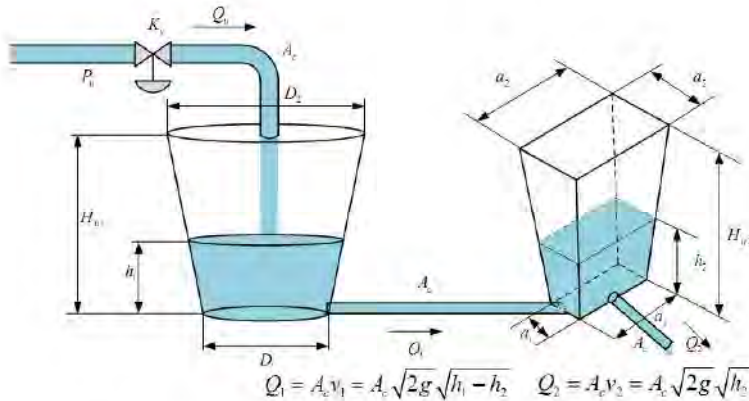


Slika 2.3: Primjer linearnog odziva sustava

U tehničkom pogledu, linearni sustavi ne postoje, ali mnogi se sustavi mogu opisati linearnim sustavima oko radne točke ili se ponašaju kao linearni sustavi unutar nekih granica. Svojstvo nelinearnosti sveprisutno je u gotovo svim tehničkim sustavima. Najčešće nelinearnosti su zasićenje (javlja se kod tranzistorskog pojačala), zračnost (javlja se kod zupčastih prijenosa), mrtva zona (javlja se kod automobila jer je potrebno savladati statičku silu otpora kotrljanja kotača da bi se automobil počeo gibati) i dr. Jedan od poznatijih nelinearnih tehničkih sustava je sustav skladištenja tekućine. Iz jednadžbe kontinuiteta proizlazi da protok ima korijensku ovisnost o visini stupca tekućine u spremniku (slika 2.5).



Slika 2.4: Primjer nelinearnog odziva sustava



Slika 2.5: Sustav skladištenja tekućine

2.1.2 Vremenski nepromjenjivi i vremenski promjenjivi sustavi

Vremenski nepromjenjivi sustavi su sustavi čiji se parametri ne mijenjaju s vremenom, odnosno sustavi koji ne mijenjaju svoja svojstva s vremenom. Izlaz sustava sa slike 2.2 može se opisati kao djelovanje operatora $\mathbf{S}[\cdot]$ na ulaz sustava prema relaciji:

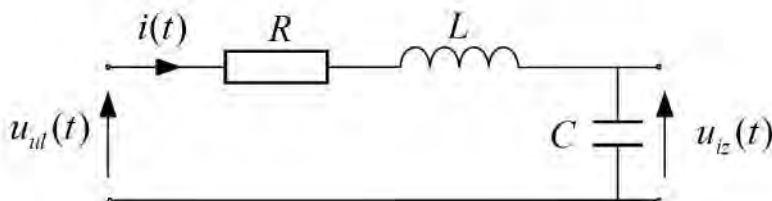
$$y(t) = \mathbf{S}[u(t)]. \quad (2.5)$$

Sustav će biti vremenski nepromjenjiv ako za pozitivnu konstantu t_0 vrijedi:

$$y(t - t_0) = \mathbf{S}[u(t - t_0)]. \quad (2.6)$$

Relacija (2.7) govori nam da će sustav uvijek imati isti odziv $y(t)$ na istu pobudu $u(t)$ bez obzira na vrijeme kada je nastupila pobuda. Na slici 2.6 prikazan je dinamički

sustav koji je poznat iz Osnova elektrotehnike. Ako se vrijednost otpornika R , induktiviteta L i kapaciteta C ne mijenja s vremenom, tada ovaj sustav predstavlja sustav s nepromjenjivim parametrima.



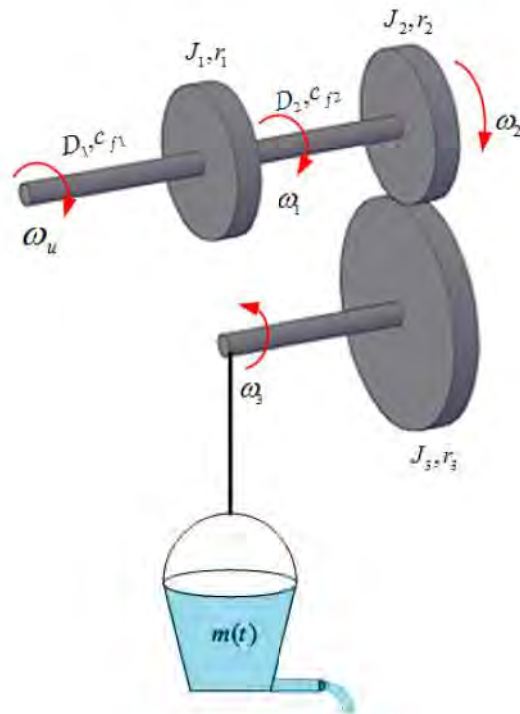
Slika 2.6: Sustav s vremenski nepromjenjivim parametrima (RLC krug)

Vremenski promjenjivi sustavi su sustavi čiji se parametri mijenjaju s vremenom, odnosno sustavi koji mijenjaju svoja svojstva s vremenom. Sustav će biti vremenski nepromjenjiv ako za pozitivnu konstantu t_0 vrijedi:

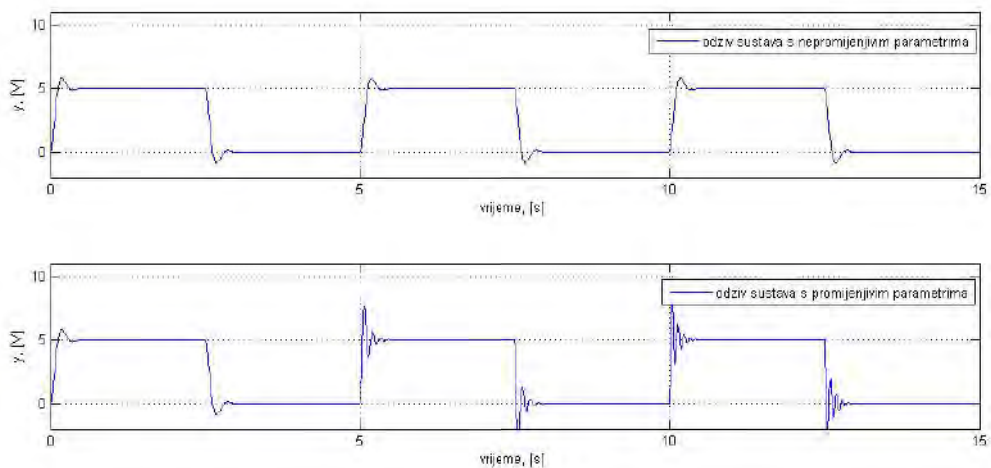
$$y(t - t_0) \neq \mathbf{S}[u(t - t_0)]. \quad (2.7)$$

Na slici 2.7 prikazan je jednostavan rotacijski sustav s 3 zamašne mase i elastičnim osovinama. Na zadnjoj osovini, gdje se proizvodi kutna brzina ω_3 , krutim užetom pričvršćena je posuda za transport tekućine. S obzirom da posuda na dnu ima cijev kroz koju istječe tekućina, masa posude smanjuje se s vremenom. Prema tome, sustav sa slike 2.7 sustav je s promjenjivim parametrima. Dizalo za transport ljudi također je sustav s promjenjivim parametrima jer masa ljudi koji se prevoze dizalom nije uvijek jednaka. Avion je sustav s promjenjivim parametrima jer prilikom leta, smanjuje se masa goriva aviona. Mehanički sustavi također se sustavi s promjenjivim parametrima jer dolazi do zamora i trošenja materijala. S obzirom da je proces zamora i trošenja materijala spor, za neke mehaničke sustave možemo reći da su vremenski nepromjenjivi sustavi unutar određenog vremenskog intervala.

Na slici 2.8 prikazan je odziv sustava s nepromjenjivim parametrima (gore) i odziv sustava s promjenjivim parametrima (dolje). Kod sustava s nepromjenjivim parametrima vremenski odziv sustava uvijek je isti ako na sustav djeluje ista pobuda. To nije slučaj kod sustava s vremenski promjenjivim parametrima (slika 2.8 (dolje)) kod kojeg je odziv sustava drugačiji tokom vremena ako na ulaz djeluje uvijek ista pobuda.



Slika 2.7: Sustav s vremenski promjenjivim parametrima ($m(t)$ je promjenjiv)



Slika 2.8: Odziv sustava s nepromjenjivim i promjenjivim parametrima

2.1.3 Kontinuirani i diskretni sustavi

Kontinuirani sustavi su sustavi u kojima su sve varijable stanja kontinuirane (mijenjaju se s vremenom). Ovakve sustave možemo opisati diferencijalnim jednadžbama

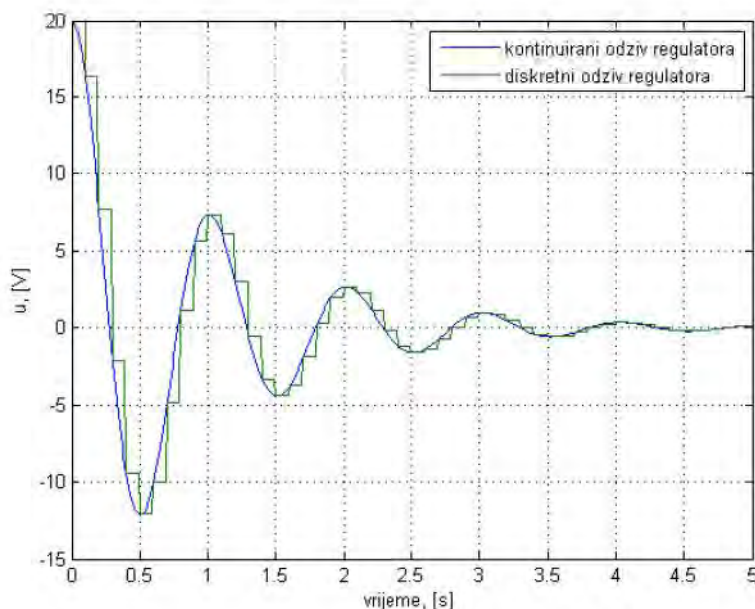
(linearnim i nelinearnim).

Većina tehničkih sustava (električnih krugova, rotacijskih sustava, sustava skladištenja, toplinskih sustava i dr.) kontinuirani su sustavi. U vrijeme kada računala nisu bila toliko pristupačna kao danas, algoritmi upravljanja zasnivali su se na kontinuiranim regulatorima (često operacijska pojačala s određenim elementima u povratnoj vezi). Danas je situacija bitno drugačija.

Diskretni sustavi su sustavi u kojima su sve varijable stanja diskretne (mijenjaju se u diskretnim vremenskim trenucima). Ovakve sustave možemo opisati jednadžbama diferencije (linearnim i nelinearnim).

Uvođenjem mikroračunala (mikrokontroleri, PLC, ugradbena računala i dr.) direktno se uvodi diskretizacija signala u sustav. Mikroračunala rade u vremenski diskretnim intervalima te tako predstavljaju diskretni sustav. Današnji regulatori tehničkih sustava u većini slučajeva diskretnog su tipa.

Ujedinjenjem rada diskretnih i kontinuiranih sustava dobivamo jednu funkcionalnu cjelinu koja se naziva **hibridnim** sustavom (sadrži **kontinuirane** i **diskretne** podsustave).



Slika 2.9: Odstav kontinuiranog i diskretnog regulatora

Na slici 2.9 prikazan je odziv kontinuiranog i diskretnog regulatora. Sa slike se može uočiti da se diskretni odziv sustava poklapa sa kontinuiranim odzivom sustava u diskretnim vremenskim trenucima koji se javljaju u jednolikom vremenskom razmaku.

2.1.4 Deterministički, nedeterministički i stohastički sustavi

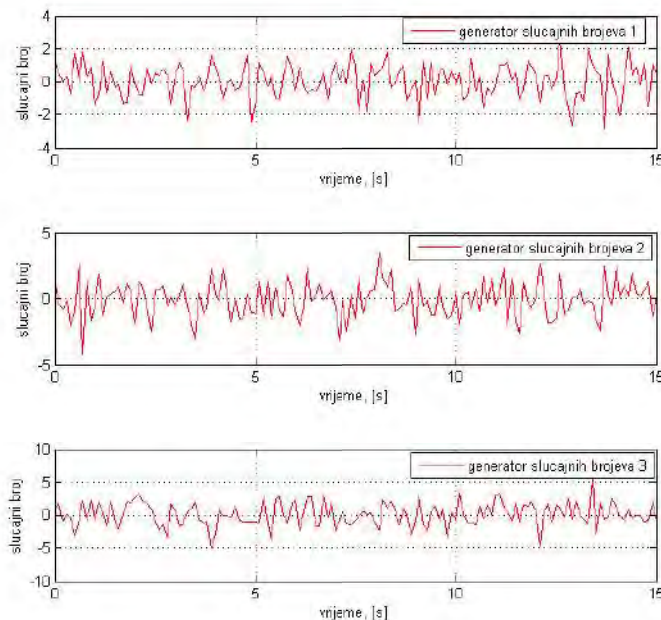
Deterministički sustavi su sustavi u kojima nema neizvjesnosti pri kreiranju budućih stanja sustava. Deterministički sustav će uvijek proizvesti isti odziv na neku pobudu $u(t)$ ako je početno stanje sustava uvijek isto. Kažemo da kod determinističkog sustava izlaz možemo predvidjeti sa stopostotnom sigurnošću.

Fizikalni zakoni reprezentirani diferencijalnim jednadžbama primjer su determinističkog sustava iako stanje sustava u nekom zadanom trenutku može biti teško opisati eksplicitno.

Nedeterministički sustavi su sustavi u kojima postoji izvjesnost u kreiranju budućih stanja sustava. Nedeterministički sustav neće uvijek proizvesti isti odziv na neku pobudu $u(t)$ ako je početno stanje sustava uvijek isto. Kažemo da kod nedeterminističkog sustava ne možemo predvidjeti izlaz.

U automobilskoj industriji dnevno izlazi veliki broj gotovih proizvoda (automobila). U malom postotku automobila javljaju se tzv. “tvorničke greške” što možemo nazvati nedeterminizmom jer ne možemo predvidjeti sa stopostotnom izvjesnošću da li će svaki automobil biti ispravan.

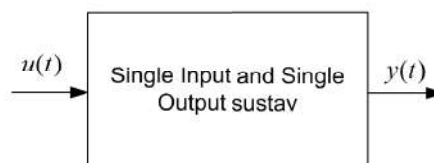
Stohastički sustavi (češće stohastički ili slučajni procesi) su sustavi kod kojih postoji neodređenost u kreiranju budućih stanja sustava koji su opisani funkcijama razdiobe. To znači da, ako je poznato početno stanje sustava, postoje mnoge trajektorije kojima sustav može ići iz nekog početnog stanja u konačno stanje, pri čemu su neke trajektorije više vjerojatne, a druge manje vjerojatne. Primjer jednog stohastičkog procesa je generator slučajnih brojeva (slika 2.10). Sa slike se može zaključiti da tri ista generatora slučajnih brojeva kao rezultat daju različite odzive.



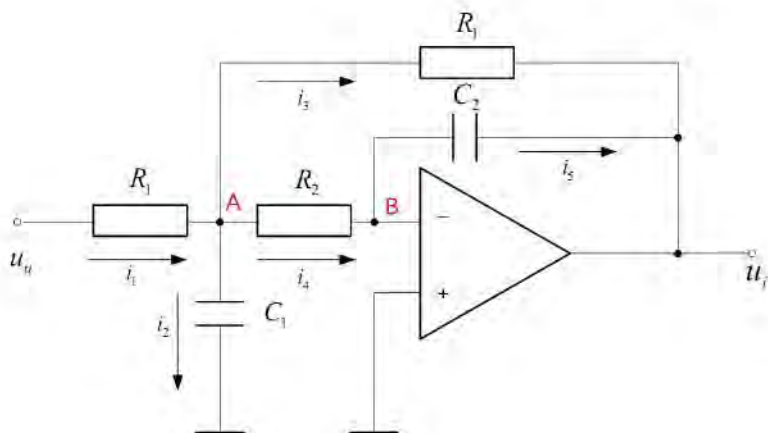
Slika 2.10: Generator slučajnih brojeva

2.1.5 Sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom (SISO) i sustavi s više ulaza i više izlaza (MIMO)

SISO sustavi su sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom, a nazivamo ih još i skalarnim sustavima. Blokovski prikaz sustava s jednim ulazom i jednim izlazom dan je na slici 2.11. Električni krug s idealnim operacijskim pojačalom (slika 2.12) samo je jedan od primjera SISO sustava.

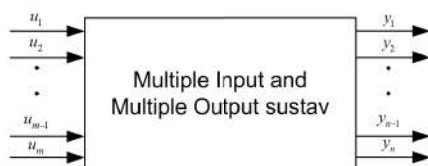


Slika 2.11: Sustav s jednim ulazom i jednim izlazom



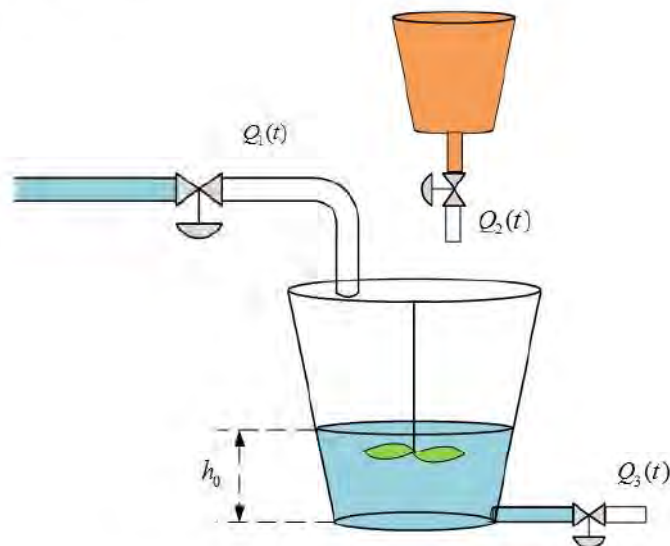
Slika 2.12: Električni krug s idealnim operacijskim pojačalom

MIMO sustavi su sustavi s više ulaza i više izlaza, a nazivamo ih još i multivarijabilnim sustavima. Blokovski prikaz sustava s više ulaza i više izlaza prikazan je na slici 2.13.



Slika 2.13: Sustav s više ulaza i više izlaza

Sustav miješanja dviju tekućina (slika 2.14) je sustav s dva ulaza (protoci Q_1 i Q_2) i dva izlaza (protok Q_3 i visina stupca tekućine h_0).

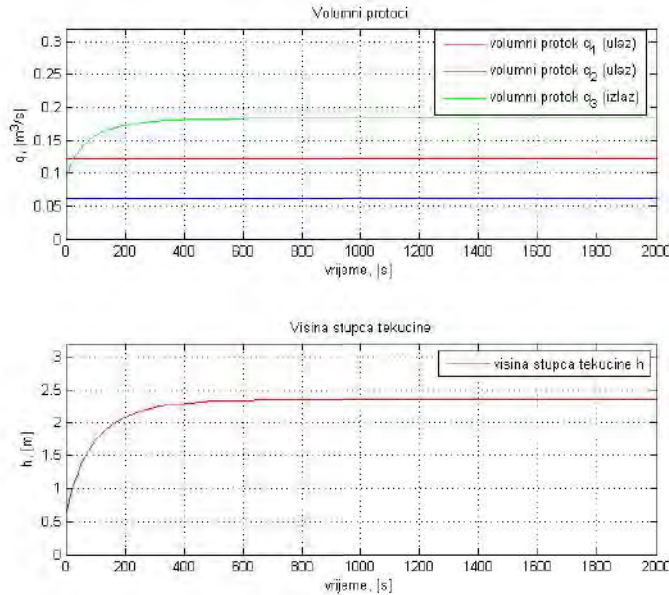


Slika 2.14: Sustav miješanja dviju tekućina

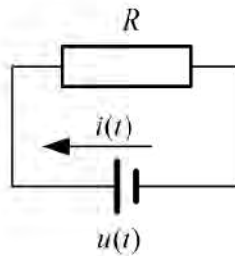
2.1.6 Sustavi s memorijom i sustavi bez memorije

Za neki sustav kažemo da je **sustav s memorijom** ako njegov odziv za nezavisnu varijablu t ovisi i o pobudi i o početnom stanju sustava. Primjer sustava s memorijom je sustav miješanja dviju tekućina (slika 2.14). Naime, u sustavu je moguće protoke Q_1 i Q_2 promatrati kao ulaze sustava, a visinu stupca tekućine h_0 kao izlaz sustava. S obzirom da u početnom stanju može postojati visina stupca tekućine h_0 za ovaj sustav kažemo da je sustav s memorijom (slika 2.15).

Sustavi bez memorije su oni sustavi čiji odziv za svaku nezavisnu varijablu t ovisi isključivo o pobudi sustava. Najjednostavniji primjer sustava bez memorije je električni otpornik (slika 2.16). Ako napon $u(t)$ promatramo kao ulaz, a struju $i(t)$ kao izlaz sustava, tada takav sustav predstavlja sustav bez memorije jer je struja $i(t)$ direktna posljedica samo napona $u(t)$.



Slika 2.15: Odziv sustava s memorijom (sustav miješanja tekućina)



Slika 2.16: Otpornički električni krug

2.1.7 Kauzalni i nekauzalni sustavi

Kauzalni sustavi su sustavi čiji izlaz ovisi isključivo o prošlim i trenutnim vrijednostima ulaza sustava. To znači da izlaz sustava $y(t_0)$ u nekom početnom trenutku t_0 ovisi samo o ulazu $u(t)$ za vrijednosti $t \leq t_0$. Svi tehnički sustavi su kauzalni sustavi.

Nekauzalni sustavi su sustavi čiji odziv izlazne veličine nastupa prije pobude što znači da sustav ima svojstvo predikcije (predviđanja). Za izlaz sustava $y(t_0)$ u nekom početnom trenutku t_0 vrijedi da je ulaz $u(t)$ nastupio za vrijednosti $t \geq t_0$.

2.2 LTI kontinuirani sustavi

U prethodnom razmatranju naveli smo klasifikaciju sustava. Sustavi kojima ćemo se baviti u nastavku knjige su **linearni i vremenski nepromjenjivi sustavi**, odnosno **LTI sustavi** (engl. *Linear Time-Invariant Systems*). Također, sustavi koje ćemo analizirati te sustavi nad kojima ćemo raditi sintezu regulacijskog kruga bit će kontinuirani sustavi. Proučavanje LTI sustava je važno iz razloga što se mnogi fizikalni sustavi mogu precizno modelirati kao LTI sustavi.

Sustavi koji su nelinearni mogu se promatrati kao linearni sustavi u radnoj točki sustava za male promjene ulaza $u(t)$ i izlaza $y(t)$. U tom slučaju potrebno je napraviti linearizaciju sustava oko radne točke sustava (u_0, y_0) . Teorija nelinearnih sustava je mnogo složenija od teorije linearnih sustava te se njome nećemo baviti u ovoj knjizi.

2.3 Osnovne strukture sustava upravljanja

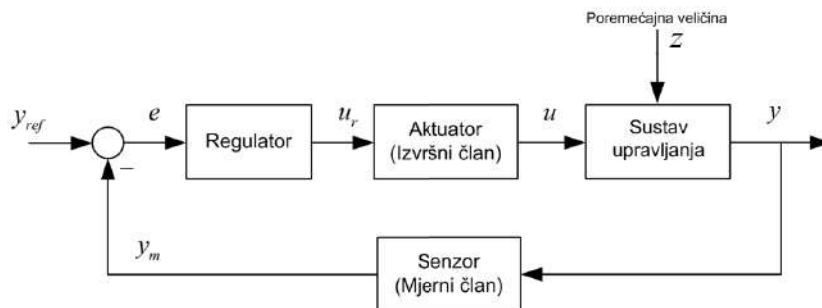
Dvije su osnovne strukture sustava automatskog upravljanja:

- Otvoreni krug automatskog upravljanja (slika 2.17)
- Zatvoreni krug automatskog upravljanja (slika 2.18).

Otvoreni krug automatskog upravljanja je struktura automatskog upravljanja u kojoj upravljačka akcija ne ovisi o izlazu iz sustava. Problem koji se javlja kod otvorenog kruga automatskog upravljanja je nemogućnost ispravljanja pogreške nastale uslijed djelovanja poremećaja. Taj problem rješava se zatvaranjem povratne veze, odnosno mjerenjem izlazne veličine. **Zatvoreni krug automatskog upravljanja** je struktura automatskog upravljanja u kojoj upravljačka akcija ovisi o izlazu iz sustava.



Slika 2.17: Otvoreni krug automatskog upravljanja



Slika 2.18: Zatvoreni krug automatskog upravljanja

Sa slika 2.17 i 2.18 mogu se iščitati sljedeći signali koji egzistiraju u osnovnim strukturama automatskog upravljanja:

- y_{ref} - referentna vrijednost signala (postavna vrijednost)
- u_r - upravljački signal (izlaz iz regulatora)
- u - ulazna veličina sustava (izlaz iz aktuatora)
- y - izlazna veličina sustava
- y_m - mjerni signal izlazne veličine sustava
- e - regulacijska pogreška (odstupanje izlazne veličine od referentne veličine)
- z - poremećajna veličina.

Podsustavi osnovnih struktura automatskog upravljanja su:

- Sustav upravljanja
- Regulator - upravlja dotokom energije u sustav
- Aktuator (izvršni član) - izvršava nalog regulatora za dotok energije u sustav
- Senzor (mjerni član) - mjeri izlaznu veličinu sustava.

U poglavlju Sinteza sustava automatskog upravljanja detaljnije ćemo se baviti strukturama automatskog upravljanja.

Poglavlje 3

Matematički modeli linearnih kontinuiranih sustava

Ako želimo raditi analizu dinamičkih sustava, koja je nužno potrebna pri sintezi regulacijskih članova, potrebno je matematički opisati dinamiku sustava. Opis sustava kreće od spoznaje bitnih fizikalnih načela. Električni sustavi opisuju se Kirchhoffovim zakonima, mehanički sustavi opisuju se Newtonovim zakonima, termodinamički sustavi opisuju se zakonima termodinamike itd. Također je potrebno poznavati zakone očuvanja energije (energetska bilanca), zakone o očuvanju količine gibanja itd [2].

Dinamika sustava može se opisati na nekoliko načina. Među prvim opisima dinamike sustava bio je opis sustava diferencijalnim jednadžbama. Ako promatramo SISO sustav (jedan ulaz i jedan izlaz), onda je potrebno izračunati izlaz sustava ako na njega dovedemo proizvoljnu pobudu. Često je to težak posao, a naročito za sustave višeg reda. Na temelju opisa sustava diferencijalnim jednadžbama, sintezom regulacijskog člana (regulatora), dobije se upravljački algoritam koji je često diferencijalna jednadžba. Ovakav pristup sintezi zahtijeva mnogo računanja i poznavanje rješenja diferencijalnih jednadžbi. Postoje dvije vrste diferencijalnih jednadžbi:

1. Obične diferencijalne jednadžbe
2. Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Parcijalne diferencijalne jednadžbe imaju više nezavisnih varijabli: vrijeme i prostorne varijable. Pretpostavimo da ćemo sve, nama zanimljive sustave moći opisati običnim diferencijalnim jednadžbama te stoga nećemo opisivati parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Obične diferencijalne jednadžbe imaju samo jednu nezavisnu varijablu, a to je vrijeme. U opisu dinamičkih sustava uvijek tražimo vremenske odzive sustava tako da će nam obične diferencijalne jednadžbe (u daljnjem tekstu diferencijalne jednadžbe) biti sasvim dovoljne za opis dinamičkih sustava. S obzirom da je matematički aparat rješavanja diferencijalnih jednadžbi vrlo složen (naročito za sustave višeg reda), koriste se druge metode za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Matematičar i astronom Pierre-Simon

Laplace (23. ožujak 1749. – 5. ožujak 1827.) osmislio je integralnu transformaciju koja olakšava matematički račun jer se sve diferencijalne jednačbe u području varijable integralne transformacije (područje kompleksne varijable s) računaju algebarski. Integralna transformacija nazvana je prema navedenom matematičaru Laplaceova transformacija i danas nalazi veliku primjenu pri opisu dinamičkih sustava. Transformacija se primjenjuje na linearne diferencijalne jednačbe tako da se uvede supstitucija $s \rightarrow d/dt$. Algebarskim putem pronade se rješenje jednačbe na proizvoljnu pobudu u Laplaceovoj domeni, a zatim se inverznom transformacijom izračuna vremenski odziv. Iako naizgled idemo dužim putem rješavanja diferencijalnih jednačbi, ova je metoda jednostavnija od rješavanja diferencijalnih jednačbi klasičnim metodama. Često se diferencijalne jednačbe n -tog reda opisuju s n diferencijalnih jednačbi prvog reda. Takav, matematički opis sustava, naziva se opis sustava po varijablama stanja.

3.1 Opis linearnih sustava linearnim diferencijalnim jednačbama

Sustavi koje ćemo opisivati linearnim diferencijalnim jednačbama (u nastavku LDJ) su kontinuirani linearni i vremenski nepromjenjivi sustavi (LTI Linear Time - Invariant Systems) [3], [4]. Opća LDJ ima oblik:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t). \quad (3.1)$$

gdje su:

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, m, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ konstantni parametri LDJ
- n je red LDJ, $n \geq m$.

Desnu stranu izraza (3.1) označimo s $f(t)$:

$$f(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t). \quad (3.2)$$

Totalni odziv sustava opisanog LDJ zbroj je homogenog $y_h(t)$ i partikularnog $y_p(t)$ rješenja:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t). \quad (3.3)$$

Opću LDJ riješit ćemo tako da najprije odredimo homogeno rješenje, a zatim partikularno rješenje. Da bismo dobili homogeno rješenje LDJ, u relaciju (3.2) uvrstimo $f(t) = 0$:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0. \quad (3.4)$$

Za homogenu LDJ pretpostavljamo homogeno rješenje:

$$y_h(t) = C e^{\lambda t} \quad (3.5)$$

koje uvrstimo u LDJ (3.4) te izračunamo karakteristične vrijednosti (korijeni) LDJ (sustava):

$$\begin{aligned}
 a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) &= 0 \\
 a_n (C e^{\lambda t})^{(n)} + \dots + a_2 (C e^{\lambda t})'' + a_1 (C e^{\lambda t})' + a_0 C e^{\lambda t} &= 0 \\
 a_n \lambda^n C e^{\lambda t} + \dots + a_2 \lambda^2 C e^{\lambda t} + a_1 \lambda C e^{\lambda t} + a_0 C e^{\lambda t} &= 0 \\
 (a_n \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) C e^{\lambda t} &= 0 \\
 a_n \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Homogena rješenja LDJ ovise o karakterističnim vrijednostima LDJ:

$$a_n \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{3.7}$$

- Ako su korijeni realni i različiti, pretpostavljeno homogeno rješenje je:

$$\begin{aligned}
 y_h(t) &= \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \\
 y_h(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}.
 \end{aligned}$$

- Ako su korijeni realni i višestruki, pretpostavljeno homogeno rješenje je:

$$\begin{aligned}
 y_h(t) &= (C_1 + C_2 t + \dots + C_k t^{k-1}) e^{\lambda_1 t} + \sum_{i=k+1}^n C_i e^{\lambda_i t} \\
 y_h(t) &= (C_1 + C_2 t + \dots + C_k t^{k-1}) e^{\lambda_1 t} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}.
 \end{aligned}$$

- Ako su korijeni konjugirano kompleksni, pretpostavljeno homogeno rješenje je:

$$\begin{aligned}
 y_h(t) &= e^{\sigma t} (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)) + \sum_{i=3}^n C_i e^{\lambda_i t} \\
 y_h(t) &= e^{\sigma t} (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)) + C_3 e^{\lambda_3 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}.
 \end{aligned}$$

Koeficijente $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ izračunat ćemo nakon što odredimo partikularno rješenje jednadžbe (3.1). Partikularna rješenja sustava ovise o funkciji $f(t)$:

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = B_0 + B_1 t + \dots + B_M t^M,$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = K_0 + K_1 t + \dots + K_M t^M.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = B,$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = K.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = Be^{at}, a \neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n,$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = Ke^{at}.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = Be^{at}, a = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k, a \neq \lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n,$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = Kt^k e^{at}.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = Be^{at}t^M, a \neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n,$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = e^{at} (K_0 + K_1 t + \dots + K_M t^M).$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = B \cos \omega_0 t,$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

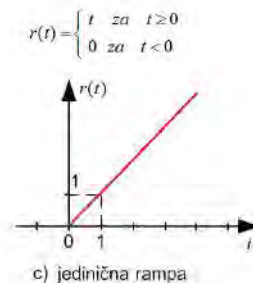
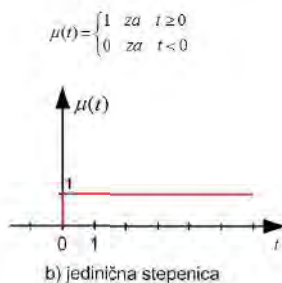
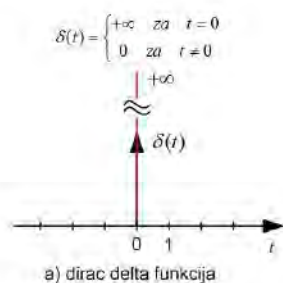
$$y_p(t) = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = B \sin \omega_0 t,$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t.$$



Slika 3.1: Osnovne pobude sustava

Partikularno rješenje posljedica je pobude na ulazu u sustav. Tipične pobude koje se koriste kod analize linearnih kontinuiranih sustava automatskog upravljanja prikazane su na slici 3.1. Nakon što odredimo partikularno rješenje $y_p(t)$, nepoznate koeficijente homogenog rješenja LDJ $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ računamo na temelju početnih uvjeta:

$$y(0), y'(0), y''(0), \dots, y^{(n-1)}(0). \quad (3.8)$$

Početne uvjete uvrstimo u totalni odziv (3.3):

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ y'(t) &= y_h'(t) + y_p'(t) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t) &= y_h^{(n-1)}(t) + y_p^{(n-1)}(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Uvrstimo li $t = 0$ u relaciju (3.9), dobit ćemo n jednadžbi s n nepoznanica (koeficijenta $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$):

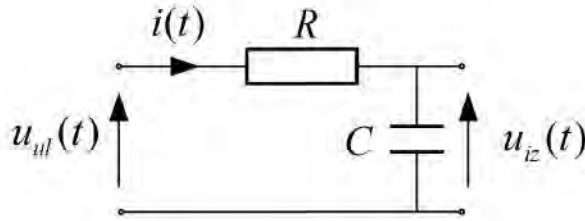
$$\begin{aligned} y(0) &= y_h(0) + y_p(0) \\ y'(0) &= y_h'(0) + y_p'(0) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(0) &= y_h^{(n-1)}(0) + y_p^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ako sustav pobudimo *dirac delta* impulsom (slika 3.1 a)), dobije se impulsni odziv, odnosno težinska funkcija sustava $g(t)$. Težinska funkcija sustava predstavlja matematički model sustava u vremenskoj domeni. Odziv sustava na bilo koju pobudu može se dobiti konvolucijskim integralom [5]:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau, \quad (3.11)$$

gdje je $y(t)$ odziv sustava na pobudu $u(t)$, a $g(t)$ težinska funkcija sustava.

Pri opisu sustava linearnim diferencijalnim jednadžbama koristit ćemo dva primjera elektroničkih sustava i dva primjera mehaničkih sustava. Prvi sustav koji ćemo opisati linearnim diferencijalnim jednadžbama bit će RC filtar.



Slika 3.2: RC filter

Na slici 3.2 prikazan je elektronički sustav (RC filter). Sustav ima jedan spremnik energije (kondenzator - spremnik napona). Broj spremnika energije određuje red sustava, odnosno red diferencijalne jednačbe što znači da je RC filter sustav 1. reda. Ulazna veličina u sustav RC filtra je napon $u_{ul}(t)$, a izlazna veličina iz sustava RC filtra je napon $u_{iz}(t)$. Matematički se sustav može opisati sljedećim diferencijalnim jednačbama:

$$\begin{aligned} u_{ul}(t) &= Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \\ u_{iz}(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nadalje, s obzirom na ulaz i izlaz sustava potrebno je eliminirati struju $i(t)$ (3.13):

$$\begin{aligned} u_{ul}(t) &= Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \Rightarrow u_{ul}(t) = Ri(t) + u_{iz}(t) \\ u_{iz}(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau / \frac{d}{dt} \Rightarrow u'_{iz}(t) = \frac{1}{C} i(t) \Rightarrow i(t) = Cu'_{iz}(t) \\ RCu'_{iz}(t) + u_{iz}(t) &= u_{ul}(t) \Rightarrow \{T = RC\} \Rightarrow Tu'_{iz}(t) + u_{iz}(t) = u_{ul}(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Krajnji izraz u izrazu (3.13) predstavlja opis sustava RC filtra diferencijalnim jednačbama. Uz pretpostavku da je ulazni napon jedinična skokovita funkcija, potrebno je naći rješenje sustava (3.14) (nema početnog napona u kondenzatoru, početni uvjeti jednaki su nuli).

$$\begin{aligned} Tu'_{iz}(t) + u_{iz}(t) &= u_{ul}(t) \\ u_{iz}(t) &= u_{izH}(t) + u_{izP}(t) \\ u_{izH}(t) &= C_1 e^{st} \\ u'_{izH}(t) &= sC_1 e^{st} \\ u_{izP}(t) &= K. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Uz pretpostavku homogenog i partikularnog rješenja slijedi homogeno rješenje (3.15)

$$\begin{aligned} TsC_1 e^{st} + C_1 e^{st} &= 0 \\ Ts + 1 = 0 &\Rightarrow s = -\frac{1}{T} \\ u_{izH}(t) &= C_1 e^{-\frac{t}{T}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

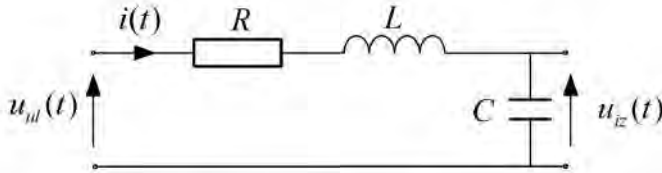
i partikularno rješenje (3.16)

$$\begin{aligned} Tu'_{izP}(t) + u_{izP}(t) &= u_{ul}(t) \\ T \cdot 0 + K &= 1 \\ K &= 1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe jednako je zbroju homogenog i partikularnog rješenja. Koeficijent C_1 može se izračunati iz rješenja diferencijalne jednadžbe uz $t = 0$.

$$\begin{aligned} u_{iz}(t) &= 1 + C_1 e^{-\frac{t}{T}} \{t = 0\} \Rightarrow 0 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = -1 \\ u_{iz}(t) &= 1 - e^{-\frac{t}{T}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sljedeći sustav koji ćemo opisati diferencijalnim jednadžbama je RLC krug.



Slika 3.3: RLC krug

Na slici 3.3 prikazan je elektronički sustav (RLC krug). Sustav ima dva spremnika energije (zavojnica - spremnik početne struje i kondenzator - spremnik početnog napona) što znači da je RLC krug sustav 2. reda. Ulazna veličina u sustav RLC kruga je napon $u_{ul}(t)$, a izlazna veličina iz sustava RLC kruga je napon $u_{iz}(t)$. Matematički se sustav RLC kruga može opisati sljedećim diferencijalnim jednadžbama (3.18):

$$\begin{aligned} u_{ul}(t) &= Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \\ u_{iz}(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.18)$$

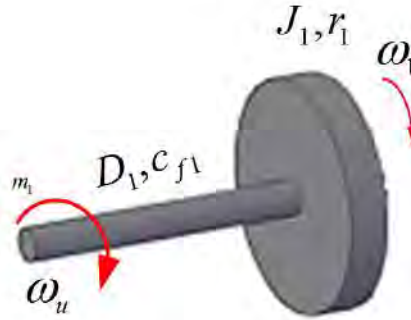
Nadalje, s obzirom na ulaz i izlaz sustava potrebno je eliminirati struju $i(t)$ (3.19):

$$\begin{aligned} u_{ul}(t) &= Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \Rightarrow u_{ul}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_{iz}(t) \\ u_{iz}(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau / \frac{d}{dt} \Rightarrow u'_{iz}(t) = \frac{1}{C} i(t) \Rightarrow i(t) = C u'_{iz}(t) / \frac{d}{dt} \Rightarrow i'(t) = C u''_{iz}(t) \\ u_{ul}(t) &= R C u'_{iz}(t) + L C u''_{iz}(t) + u_{iz}(t) \\ L C u''_{iz}(t) + R C u'_{iz}(t) + u_{iz}(t) &= u_{ul}(t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Krajnji izraz u izrazu (3.19) predstavlja opis sustava RLC kruga diferencijalnim jednadžbama. Radi jednostavnosti, neka su iznosi parametara električnih komponenata $R = 1\Omega$, $L = 1H$ i $C = 1F$. Jednadžba (3.19) sada se može zapisati kao:

$$u''_{iz}(t) + u'_{iz}(t) + u_{iz}(t) = u_{ul}(t). \quad (3.20)$$

Izraz (3.20) predstavlja opis sustava RLC filtra diferencijalnom jednadžbom. Sljedeći tehnički sustav koji ćemo opisati diferencijalnim jednadžbama je rotacijski sustav sa slike 3.4.



Slika 3.4: Rotacijski sustav

Parametri sa slike 3.4 redom su:

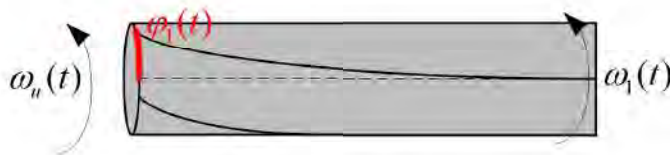
- c_{f1} koeficijent torzije vratila (osovine), $[Nm/rad]$
- D_1 prigušenje vratila (osovine), $[Nms/rad]$
- J_1 moment inercije zamašne mase (zupčanik), $[kgm]$
- r_1 polumjer zamašne mase (zupčanika), $[kg]$.

Varijable sa slike 3.4 redom su:

- ω_u ulazna brzina vrtnje, $[rad/s]$
- ω_1 brzina vrtnje zamašne mase, $[rad/s]$
- m_1 moment torzije na vratilu, $[Nm]$.

Ulazna veličina rotacijskog sustava je brzina vrtnje $\omega_u(t)$, a izlazna veličina rotacijskog sustava je brzina vrtnje $\omega_1(t)$. Matematički se rotacijski sustav može opisati sljedećim diferencijalnim jednadžbama (3.21):

$$\begin{aligned} m_1(t) &= c_{f1} \varphi_1(t) = c_{f1} \int_0^t (\omega_u(t) - \omega_1(t)) dt \\ m_1(t) &= D_1 \omega_1(t) + J_1 \frac{d\omega_1(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (3.21)$$



Slika 3.5: Torzija vratila

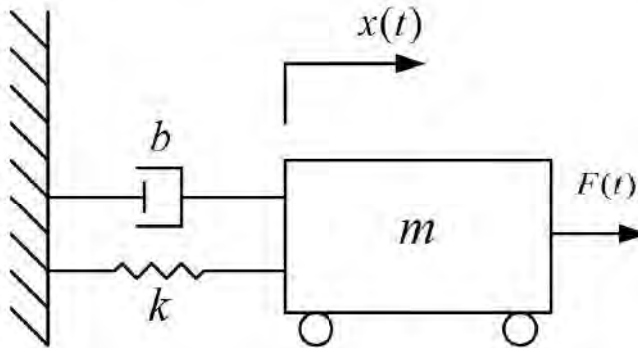
Kut torzije vratila φ_1 prikazan je na slici 3.5. S obzirom da je kutni pomak integral brzine vrtnje, kut torzije vratila dobiven je integracijom razlike ulazne i izlazne kutne brzine na vratilu. Eliminacijom momenta torzije na vratilu dobije se:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= c_{f1} \int_0^t (\omega_u(t) - \omega_1(t)) dt / \frac{d}{dt} \Rightarrow m_1'(t) = c_{f1} (\omega_u(t) - \omega_1(t)) \\ m_1(t) &= D_1 \omega_1(t) + J_1 \frac{d\omega_1(t)}{dt} / \frac{d}{dt} \Rightarrow m_1'(t) = D_1 \omega_1'(t) + J_1 \omega_1''(t) \\ J_1 \omega_1''(t) + D_1 \omega_1'(t) + c_{f1} \omega_1(t) &= c_{f1} \omega_u(t). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Krajnji izraz u (3.22) predstavlja opis rotacijskog sustava diferencijalnim jednadžbama. Radi jednostavnosti neka su vrijednosti parametara $c_{f1} = 1Nm/rad$, $D_1 = 1Nms/rad$ i $J_1 = 1kgm$. Jednadžba (3.22) sada se može zapisati kao:

$$\omega_1''(t) + \omega_1'(t) + \omega_1(t) = \omega_u(t) \quad (3.23)$$

Drugi mehanički sustav koji ćemo opisati je primjer horizontalnog mehaničkog oscilatora prikazanog na slici 3.6. Ovaj je sustav matematički ekvivalentan sustavu ovjesa automobila.



Slika 3.6: Horizontalni mehanički oscilator

Parametri mehaničkog sustava sa slike 3.6 redom su:

- m - masa gibajućeg tijela, [kg]
- b - koeficijent prigušenja amortizera, [kg/s]
- k - koeficijent opruge, [kg/s²].

Ulazna veličina mehaničkog oscilatora je sila $F(t)$, a izlazna veličina mehaničkog oscilatora je pomak $x(t)$ mase m . Matematički se ovaj mehanički sustav može opisati jednadžbom dinamičke ravnoteže (3.24):

$$mx''(t) = F(t) - bx'(t) - kx(t). \quad (3.24)$$

U relaciji (3.24) izlaznu veličinu i njezinu promjenu potrebno je prebaciti na desnu strani te se dobije opis mehaničkog oscilatora diferencijalnim jednadžbama (3.25):

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = F(t). \quad (3.25)$$

Radi jednostavnosti neka su vrijednosti parametara $m = 1$ kg, $b = 1$ kg/s, $k = 1$ kg/s². Jednadžba (3.25) sada se može zapisati kao:

$$x''(t) + x'(t) + x(t) = F(t). \quad (3.26)$$

Opisali smo četiri tehnička sustava linearnim diferencijalnim jednadžbama. Dva su sustava elektronička, a dva su mehanička. Kada bismo u relaciju (3.23) uveli supstituciju $\omega_1(t) = u_{iz}(t)$ i $\omega_u(t) = u_{ul}(t)$, dobili bismo ekvivalentne linearne diferencijalne jednadžbe. Isto tako, kada bismo u relaciju (3.26) uveli supstituciju $x(t) = u_{iz}(t)$ i $F(t) = u_{ul}(t)$, ponovno bismo dobili ekvivalentne linearne diferencijalne jednadžbe. S obzirom na model sustava s diferencijalnim jednadžbama, mnogi su tehnički sustavi ekvivalentni. Nekada, kada nije bilo simulacijskih paketa za modeliranje i simuliranje sustava, modeli tehničkih sustava modelirali su se s operacijskim pojačalima. To znači da svaki tehnički sustav ima svoj električki ekvivalent opisan elektroničkim sustavom. S obzirom da su i RLC krug i rotacijski sustav opisani istom diferencijalnom jednadžbom, u daljnjem razmatranju promatrat ćemo samo diferencijalnu jednadžbu (3.20) RLC kruga. Uz pretpostavku da je ulazni napon jedinična skokovita funkcija, potrebno je pronaći rješenje sustava (3.20) (nema početnog napona u kondenzatoru i nema početne struje u zavojnici).

$$\begin{aligned} u''_{iz}(t) + u'_{iz}(t) + u_{iz}(t) &= u_{ul}(t) \\ u_{iz}(t) &= u_{izH}(t) + u_{izP}(t) \\ u_{izH}(t) &= C_1 e^{st} \\ u'_{izH}(t) &= s C_1 e^{st} \\ u''_{izH}(t) &= s^2 C_1 e^{st} \\ u_{izP}(t) &= K. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Uz pretpostavku homogenog i partikularnog rješenja slijedi homogeno rješenje (3.28)

$$\begin{aligned} s^2 + s + 1 &= 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} \\ u_{izH}(t) &= C_1 e^{\left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} e^{j \frac{\sqrt{3}}{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t} e^{-j \frac{\sqrt{3}}{2}t} \\ u_{izH}(t) &= e^{-\frac{1}{2}t} \left(C_1 \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + j \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + C_2 \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - j \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right) \\ u_{izH}(t) &= e^{-\frac{1}{2}t} \left((C_1 + C_2) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + (C_1 - C_2) j \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \Big|_{\substack{A=C_1+C_2 \\ B=(C_1-C_2)j}} \\ u_{izH}(t) &= e^{-\frac{1}{2}t} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

i partikularno rješenje (3.29)

$$\begin{aligned} u''_{izP}(t) + u'_{izP}(t) + u_{izP}(t) &= u_{ul}(t) \\ 0 + 0 + K &= 1 \\ K &= 1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe jednako je zbroju homogenog i partikularnog rješenja. Koeficijente C_1 i C_2 izračunati ćemo iz rješenja diferencijalne jednadžbe uz $t = 0$

(kondenzator u $t = 0$ nema početnog napona, a zavojnica u $t = 0$ nema početne struje). Iz uvjeta da kondenzator u $t = 0$ nema početnog napona, dobit ćemo $u_{iz}(0) = 0$. S obzirom da je sustav opisan diferencijalnom jednačbom 2. reda, potrebna su dva početna uvjeta. Drugi početni uvjet direktno je vezan za početnu struju zavojnice:

$$u'_{iz}(t) = \frac{1}{C}i(t) \Rightarrow u'_{iz}(0) = \frac{1}{C}i(0) = 0. \quad (3.30)$$

Koristeći početne uvjete dobit ćemo koeficijente C_1 i C_2 :

$$\begin{aligned} u_{iz}(t) &= 1 + e^{-\frac{1}{2}t} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \\ u'_{iz}(t) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + e^{-\frac{1}{2}t} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}A \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}B \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \\ u_{iz}(0^-) &= 1 + A = 0 \Rightarrow A = -1 \\ u'_{iz}(0^-) &= -\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0 \Rightarrow B = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Konačno rješenje diferencijalne jednačbe (3.20) je:

$$u_{iz}(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right). \quad (3.32)$$

Zaključili smo da RLC krug (slika 3.3), rotacijski sustav (slika 3.4) i mehanički oscilator (slika 3.6) imaju ekvivalentne diferencijalne jednačbe. Uz pretpostavku jedinične skokovite pobude rotacijskog sustava te da su svi početni uvjeti rotacijskog sustava jednaki nuli slijedi (*Provjerite!*):

$$\omega_1(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right). \quad (3.33)$$

Uz pretpostavku jedinične skokovite pobude mehaničkog oscilatora te da su svi početni uvjeti mehaničkog oscilatora jednaki nuli slijedi (*Provjerite!*):

$$x(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right). \quad (3.34)$$

3.2 Opis sustava prijenosnom funkcijom u Laplaceovoj domeni

3.2.1 Laplaceova transformacija

Problemi koje rješavamo u automatskom upravljanju (dinamika sustava) uključuju operacije deriviranja i integriranja. Tim operacijama dodijelit ćemo operatore kojima ćemo diferencijalne jednačbe moći opisati algebarskim jednačbama. Jedna od transformacija, kojom se diferencijalne jednačbe mogu transformirati u jednostavniju, algebarsku

formu, naziva se Laplaceova transformacija. Ova transformacija pogodna je za sustave višeg reda jer omogućuje rješavanje diferencijalnih jednadžbi na jednostavan način.



Slika 3.7: Shematski prikaz rješenja diferencijalne jednadžbe

Na slici 3.7 prikazan je shematski prikaz rješavanja diferencijalne jednadžbe. Diferencijalne jednadžbe transformiraju se u algebarski oblik, zatim se rješava algebarska jednadžba te se inverznom transformacijom dobije rješenje diferencijalne jednadžbe.

Definicija Laplaceove transformacije je [4], [5]:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad (3.35)$$

gdje je s kompleksna varijabla. Funkcija $f(t)$ naziva se original ili gornja funkcija, a funkcija $F(s)$ naziva se slika ili donja funkcija. Da bismo olakšali zapisivanje, mala slova neka predstavljaju originale (gornje funkcije), a velika slova neka predstavljaju slike (donje funkcije). Laplaceovu transformaciju skraćeno ćemo pisati na jedan od dva sljedeća načina:

$$f(t) \circ \bullet \rightarrow F(s) \text{ ili } F(s) = \mathcal{L}(f(t)),$$

gdje je originalu $f(t)$ pridružena slika $F(s)$. Inverznu Laplaceovu transformaciju skraćeno ćemo pisati također na jedan od dva sljedeća načina:

$$F(s) \bullet \rightarrow \circ f(t) \text{ ili } f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)),$$

gdje je slici $F(s)$ pridružen original $f(t)$. Pokušajmo sada izvesti Laplaceov transformat za eksponencijalnu funkciju $f(t) = e^{-at}$ (najčešća funkcija):

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt \\ F(s) &= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{s+a} \\ e^{-at} &\circ \bullet \rightarrow \frac{1}{s+a}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Kod sustava koji imaju oscilatorno ponašanje u odzivu sadrže kombinacije sinus i kosinus funkcije. Iz *Eulerove formule* $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ i relacije (3.36) slijede transformati za sinus i kosinus funkcije:

$$\begin{aligned}
 e^{i\omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t, e^{-at} = e^{i\omega t} \Rightarrow a = -i\omega \\
 \uparrow \\
 \frac{1}{s+a} &= \frac{1}{s-i\omega} \frac{s+i\omega}{s+i\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\
 \cos \omega t + i \sin \omega t &\circ \bullet \frac{s}{s^2+\omega^2} + i \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\
 \cos \omega t &\circ \bullet \frac{s}{s^2+\omega^2}, \sin \omega t \circ \bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Odziv nepobuđenog sustava s početnim uvjetima često sadrži jedan od tri navedena originala (eksponencijalna funkcija, sinus i kosinus). Na slici 3.1 prikazane su najčešće korištene pobude (dirac delta, skokovita pobuda i rampa).

Izvod transformata dirac delta impulsa prikazan je relacijom (3.38):

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \tag{3.38}$$

Izvod transformata step funkcije prikazan je relacijom (3.39):

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \mu(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt \\
 F(s) &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Izvod transformata rampe prikazan je relacijom (3.40):

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} t e^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & dv = e^{-st} \\ du = 1 & v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right| \\
 F(s) &= -\frac{1}{s} t e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt = 0 + \frac{1}{s} \left(0 - \left(-\frac{1}{s}\right) \right) = \frac{1}{s^2}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Izveli smo transformate najvažnijih pobudnih signala koji se pojavljuju u automatskom upravljanju. Odziv sustava na pobudu funkcije *dirac delta* zove se težinska funkcija i označavat ćemo je s $g(t)$, a odziv sustava na skokovitu pobudu zove se prijelazna funkcija i označavat ćemo je s $h(t)$. Odziv sustava na rampu označavat ćemo s $r(t)$. Sada ćemo pokazati nekoliko svojstava Laplaceove transformacije [5]:

- **Linearnost Laplaceove transformacije:** Ako je:

$$x(t) \circ \bullet X(s), y(t) \circ \bullet Y(s), \tag{3.41}$$

tada vrijedi:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \circ \bullet \alpha X(s) + \beta Y(s). \tag{3.42}$$

- **Množenje varijable s konstantom:**

$$\begin{aligned} x(at) &\circ\!\!\!\bullet \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \\ X(bs) &\bullet\!\!\!\circ \frac{1}{b}x\left(\frac{t}{b}\right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

- **Prigušenje originala $x(t)$:** Prigušenje originala odgovara pomakom slike ulijevo:

$$e^{-at}x(t) \circ\!\!\!\bullet X(s+a). \quad (3.44)$$

- **Teorem o pomaku originala:** Neka je $x(t) \circ\!\!\!\bullet X(s)$ i $a > 0$. Pomak originalu udesno odgovara prigušenju slike:

$$x(t-a)\mu(t-a) \circ\!\!\!\bullet e^{-as}X(s). \quad (3.45)$$

- **Deriviranje originala $x(t)$:** Za deriviranje originala $x(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x'(t) &\circ\!\!\!\bullet sX(s) - x(0) \\ x''(t) &\circ\!\!\!\bullet s^2X(s) - sx(0) - x'(0) \\ &\vdots \\ x^{(n)}(t) &\circ\!\!\!\bullet s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (3.46)$$

- **Deriviranje slike $x(t)$:** Deriviranje u frekvencijskoj domeni (s domeni) odgovara množenju s $-t$ u vremenskoj domeni:

$$\begin{aligned} (-t)x(t) &\circ\!\!\!\bullet X'(s) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ (-t)^n x(t) &\circ\!\!\!\bullet X^{(n)}(s). \end{aligned} \quad (3.47)$$

- **Integriranje originala:** Integriranje originala odgovara dijeljenju slike s kompleksnom varijablom s .

$$\int_0^t x(t)dt \circ\!\!\!\bullet \frac{X(s)}{s}. \quad (3.48)$$

- **Integriranje slike:** Integriranje slike odgovara dijeljenju originala s vremenskom varijablom t .

$$\frac{x(t)}{t} \circ\!\!\!\bullet \int_s^\infty X(s)ds. \quad (3.49)$$

- **Teorem o konačnoj vrijednosti:**

Konačna vrijednost ili stacionarno stanje (ustaljena vrijednost) odziva može se dobiti sljedećim izrazom:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (3.50)$$

Izraz (3.50) biti će primijenjen u zadnjem poglavlju kod proračuna regulacijskog odstupanja. Tablica osnovnih Laplaceovih transformata nalazi se u poglavlju 9 PRILOZI.

- **Teorem o konvoluciji:** Konvolucija dvaju originala odgovara umnošku slika:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad \longleftrightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s), \quad (3.51)$$

gdje je $y(t)$ odziv sustava na pobudu $u(t)$, a $g(t)$ težinska funkcija sustava. Na temelju relacije (3.51) definirajmo sada prijenosnu funkciju sustava kao omjer izlaza i ulaza sustava u Laplaceovoj domeni:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (3.52)$$

Relacija (3.52) predstavlja matematički model sustava u Laplaceovoj domeni. Izlaz sustava (3.51) u Laplaceovoj domeni potrebno je transformirati u vremensku domenu. Potrebno je napraviti inverznu Laplaceovu transformaciju.

3.2.2 Inverzna Laplaceova transformacija

Da bismo dobili rješenje diferencijalne jednadžbe potrebno je algebarski izraz, koji smo dobili Laplaceovom transformacijom, transformirati u pogodan oblik za inverznu Laplaceovu transformaciju. Ako je $X(s)$ slika originala $x(t)$, tada je i $x(t)$ original slike $X(s)$. Definicija inverzne Laplaceove transformacije je:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s)e^{st}ds. \quad (3.53)$$

Definicija (3.53) presložena je za izračun vremenskog signala $x(t)$ pa ćemo pokazati druge, jednostavnije načine. Problem inverzne Laplaceove transformacije znatno je složeniji od problema Laplaceove transformacije. Za sada bismo znali napraviti inverznu Laplaceovu transformaciju za neke jednostavne primjere:

$$\begin{aligned} \frac{s+4}{s^2+25} &= \frac{s}{s^2+5^2} + \frac{4}{s^2+5^2} = \frac{s}{s^2+5^2} + \frac{4}{5} \frac{5}{s^2+5^2} \quad \bullet \longrightarrow \cos 5t + \frac{4}{5} \sin 5t \\ \frac{s}{s+1} &= \frac{s+1-1}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} \quad \bullet \longrightarrow \delta(t) - e^{-t} \\ \frac{1}{s^2+2s+2} &= \frac{1}{(s+1)^2+1} \quad \bullet \longrightarrow e^{-t} \sin t \end{aligned} \quad (3.54)$$

Prvi izraz u (3.54) predstavlja zbroj sinusa i kosinusa. Potrebno je samo odrediti frekvenciju signala ω i prema relaciji (3.37) napraviti inverznu Laplaceovu transformaciju.

U drugom izrazu u (3.54) potrebno je dodati i oduzeti broj 1. Koristeći relacije (3.36) i (3.38) možemo odrediti original. Treći izraz u (3.54) nešto je složeniji. Ako nazivnik ima kompleksne korijene (nultočke), tada je potrebno nazivnik svesti na potpuni kvadrat. Koristeći svojstvo prigušenja originala, možemo zaključiti da je slika trećeg izraza zapravo prigušena sinus funkcija. U slučaju da je potrebno naći inverz slike prijenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad (3.55)$$

problemu više ne možemo pristupiti na jednostavan način kao što je to prikazivano do sada. Neka je težinska funkcija (odziv sustava na *dirac delta* funkciju) sustava u Laplaceovoj domeni predstavljena kao racionalna funkcija:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, n \geq m. \quad (3.56)$$

Racionalnu funkciju (3.56) potrebno je rastaviti na proste razlomke. Ovaj je problem posebno jednostavan ukoliko su sve nultočke polinoma nazivnika $Q(s)$ realne i jednodruke. Nultočke polinoma nazivnika $Q(s)$ prijenosne funkcije predstavljaju polove sustava (označavat ćemo ih s p_i), a nultočke polinoma brojnika $P(s)$ prijenosne funkcije predstavljaju nule sustava (označavat ćemo ih s n_i). U nastavku teksta koristit ćemo samo termine nule i polovi sustava. Ako su polovi prijenosne funkcije (3.56) jednodruki i realni, tada se racionalna prijenosna funkcija $G(s) = P(s)/Q(s)$ može napisati u obliku:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}. \quad (3.57)$$

Inverzna transformacija razlomljene racionalne funkcije $G(s)$ je eksponencijalna funkcija:

$$g(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t}. \quad (3.58)$$

Koeficijenti K_1, K_2, \dots, K_n mogu se dobiti prema sljedećoj relaciji:

$$K_k = \lim_{s \rightarrow p_k} \frac{P(s)(s - p_k)}{Q(s)}, k = 1 \dots n. \quad (3.59)$$

Ovakav razvoj racionalne funkcije na proste razlomke u literaturi se naziva *Heavisideov* razvoj. To je samo jedan od načina kako se mogu odrediti koeficijenti K_1, K_2, \dots, K_n . Sljedeći način temelji se na izjednačavanju koeficijenata uz iste potencije kompleksne varijable s :

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{Q(s)} &= \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n} \\ \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} &= \frac{K_1}{s - p_1} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n} / (s - p_1) \dots (s - p_n) \\ b_ms^m + \dots + b_1s + b_0 &= K_1(s - p_2) \dots (s - p_n) + \dots + K_n(s - p_1) \dots (s - p_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Ako $G(s)$ ima kompleksne polove, tada se racionalna funkcija rastavlja kao ($p_{1,2} = -\sigma \mp j\omega$):

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{K_1 + K_2s}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}. \quad (3.61)$$

Ako $G(s)$ ima dvostruke, trostruke, četverostruke i višestruke polove, tada se racionalna funkcija rastavlja kao:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{K_{1,1}}{s - p_1} + \dots + \frac{K_{1,r}}{(s - p_1)^r} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}, \quad (3.62)$$

gdje je r višestrukost pola. Koeficijenti višestrukih polova relacije (3.62) mogu se dobiti na sljedeći način:

$$K_{1,i} = \frac{1}{(r-i)!} \lim_{s \rightarrow p_1} \left\{ \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} \left[(s - p_1)^r \frac{P(s)}{Q(s)} \right] \right\}, i = r, r-1, \dots, 2, 1. \quad (3.63)$$

U slučaju da imamo više višestrukih polova, istom analogijom kao i u prethodnom primjeru mogu se dobiti svi koeficijenti rastava prijenosne funkcije na proste razlomke. Nakon rastavljanja racionalne funkcije na proste razlomke inverzna Laplaceova transformacija dobije se korištenjem tablice Laplaceove transformacije koja se nalazi u poglavlju 9 PRILOZI.

Pokušajmo sada problem (3.54) riješiti na oba načina. Polovi sustava su redom $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 2, p_4 = 3$.

Prvi način:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3} \\ A &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{6} \\ B &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{-1}{2} \\ C &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s+2}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{1}{2} \\ D &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{6} \\ G(s) &= \frac{\frac{1}{6}}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} - \frac{\frac{1}{6}}{s+3} \\ \Downarrow \\ g(t) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Drugi način:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3} \\
 1 &= A(s+1)(s+2)(s+3) + Bs(s+2)(s+3) + Cs(s+1)(s+3) + \\
 &+ Ds(s+1)(s+2) \\
 1 &= A(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) + B(s^3 + 5s^2 + 6s) + C(s^3 + 4s^2 + 3s) + \\
 &+ D(s^3 + 2s^2 + 2s) \\
 1 &= 6A \\
 0 &= 11A + 6B + 3C + 2D \\
 0 &= 6A + 5B + 4C + 2D \\
 0 &= A + B + C + D \\
 A &= \frac{1}{6}, B = \frac{-1}{2}, C = \frac{1}{2}, D = \frac{-1}{6} \\
 G(s) &= \frac{\frac{1}{6}}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} - \frac{\frac{1}{6}}{s+3} \\
 \bullet \\
 \circ \\
 g(t) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}.
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Ovime smo završili s opisom Laplaceove transformacije i inverzne Laplaceove transformacije. S obzirom da nam je glavni cilj bio pojednostavljenje rješavanja diferencijalnih jednadžbi i jednostavniji proračun odziva sustava, Laplaceovu ćemo transformaciju primijeniti na sustave RC i RLC kruga. Najprije ćemo transformaciju primijeniti na RC filtru. Relaciju (3.13) možemo zapisati u Laplaceovoj domeni:

$$\begin{aligned}
 u_{ul}(t) &= Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad U_{UL}(s) = RI(s) + \frac{1}{sC} I(s) = \left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s) \\
 u_{iz}(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad U_{IZ}(s) = \frac{1}{sC} I(s).
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Prijenosna funkcija sustava definirana je kao omjer izlaza i ulaza sustava u Laplaceovoj domeni:

$$G(s) = \frac{U_{iz}(s)}{U_{ul}(s)} = \frac{\frac{1}{sC} I(s)}{\left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{Ts + 1}. \tag{3.67}$$

Isto bi se rješenje dobilo ako bi se Laplaceova transformacija primijenila na diferen-

cijalnu jednadžbu sustava (3.13):

$$RCu'_{iz}(t) + u_{iz}(t) = u_{ul}(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad (RCs + 1)U_{IZ}(s) = U_{UL}(s)/(RCs + 1)$$

$$G(s) = \frac{U_{IZ}(s)}{U_{UL}(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{Ts + 1}. \quad (3.68)$$

S obzirom da je ulazni napon jednak jediničnoj stepenici ($1/s$ u Laplaceovoj domeni), odziv sustava moguće je riješiti uz pomoć tablice Laplaceovih transformacija u poglavlju 9 PRILOZI na sljedeći način:

$$U_{IZ}(s) = G(s)U_{UL}(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s}$$

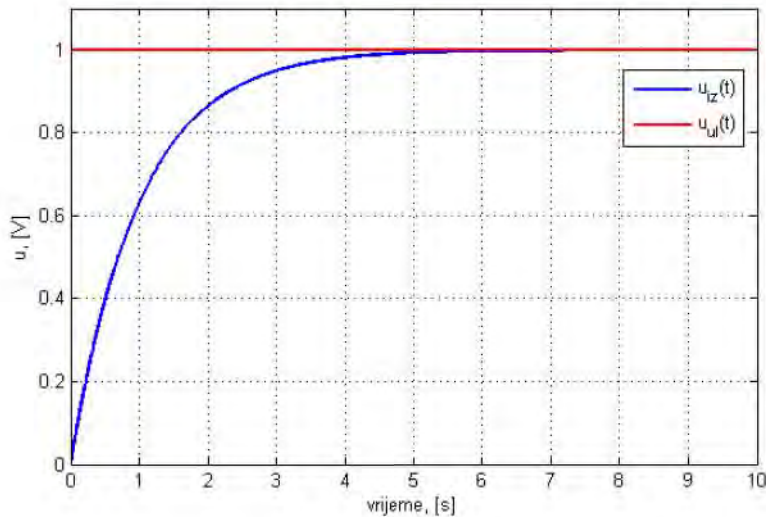
$$U_{IZ}(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s} = \frac{A}{Ts + 1} + \frac{B}{s} / (Ts + 1)s$$

$$As + B(Ts + 1) = 1 \quad (3.69)$$

$$B = 1, A + BT = 0 \Rightarrow A = -T$$

$$U_{IZ}(s) = \frac{1}{s} + \frac{-T / : T}{Ts + 1 / : T} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad u_{iz}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}.$$

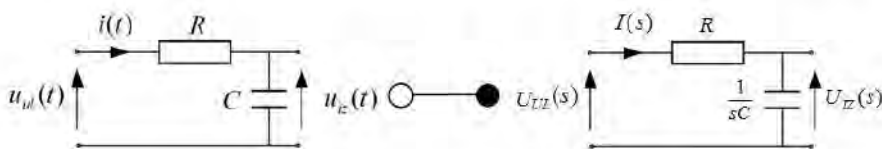
Prijenosna funkcija dobivena relacijom (3.67) naziva se PT1 član, odnosno proporcionalni član s jednom vremenskom konstantom. Radi jednostavnosti pretpostavimo da je $T = RC = 1s$.



Slika 3.8: Odziv RC filtra na skokovitu pobudu

Odziv sustava RC filtra na skokovitu pobudu za zadanu vremensku konstantu T prikazan je na slici 3.8. Odziv je eksponencijalan što odgovara dosadašnjim spoznajama o RC filtru. Sa slike 3.8 moguće je očitati da se radi o sustavu s vremenskom konstantom $T = 1s$ jer odziv u prvoj sekundi dostigne 63.21% svoje konačne vrijednosti.

Promatrajući relaciju (3.66) možemo vidjeti da električne komponente R i C poprimaju u Laplaceovoj domeni izraze za impedanciju. Transformacija je prikazana na slici 3.9.



Slika 3.9: RC filter: vremenska i Laplaceova domena

Kada se električna shema transformira iz vremenske u Laplaceovu domenu, naponi i struje računaju se algebarski. Račun u Laplaceovoj domeni iz tog je razloga pojednostavljen. Prijenosna funkcija $G(s)$ za sustav RC filtra poprima oblik iz relacije (3.67). Kada se prijenosna funkcija transformira u vremensku domenu pomoću tablica Laplaceove transformacije (9 PRILOZI) dobit ćemo impulsni odziv, odnosno težinsku funkciju¹:

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1} \quad \bullet \circ \quad g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (3.70)$$

Primjenom Laplaceove transformacije na diferencijalne jednadžbe (3.18) RLC filtra dobit ćemo:

$$\begin{aligned} u_{ul}(t) &= Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad \circ \bullet \quad U_{UL}(s) = \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right) I(s) \\ u_{iz}(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad \circ \bullet \quad U_{IZ}(s) = \frac{1}{sC} I(s). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Prijenosna funkcija definirana je kao omjer izlaza i ulaza sustava u Laplaceovoj domeni:

$$G(s) = \frac{U_{IZ}(s)}{U_{UL}(s)} = \frac{\frac{1}{sC} I(s)}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}. \quad (3.72)$$

Isto bi se rješenje dobilo ako bi se Laplaceova transformacija primijenila na diferencijalnu jednadžbu (3.20):

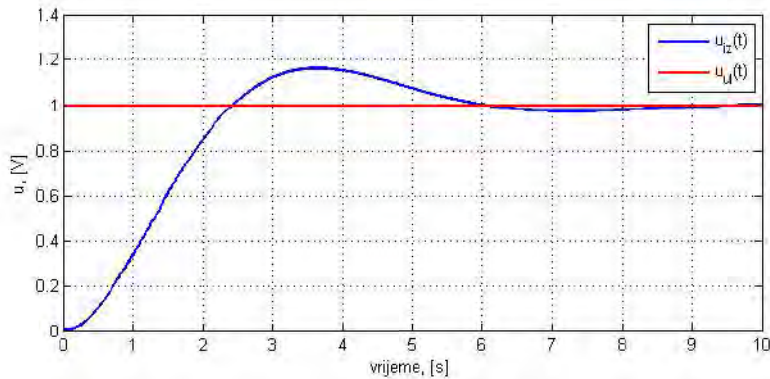
$$\begin{aligned} LCu''_{iz}(t) + RCu'_{iz}(t) + u_{iz}(t) &= u_{ul}(t) \quad \circ \bullet \quad (LCs^2 + RCs + 1) U_{IZ}(s) = U_{UL}(s) \\ G(s) &= \frac{U_{IZ}(s)}{U_{UL}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

S obzirom da je ulazni napon jednak jediničnoj stepenici ($1/s$ u Laplaceovoj domeni), odziv sustava moguće je riješiti uz pomoć tablice Laplaceovih transformacija u poglavlju

¹Impulsni odziv ili težinska funkcija je odziv sustava na dirac delta funkciju, ono što je u vremenskoj domeni impulsni odziv to je u Laplaceovoj domeni prijenosna funkcija

9 PRILOZI na sljedeći način (radi jednostavnosti neka su vrijednosti električnih komponenta $R = 1\Omega$, $L = 1H$ i $C = 1F$):

$$\begin{aligned}
 U_{IZ}(s) &= G(s)U_{UL}(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 + s + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \frac{1}{s} \\
 U_{IZ}(s) &= \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \frac{1}{s} = \frac{A + Bs}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{C}{s} \\
 As + Bs^2 + C(s^2 + s + 1) &= 1 \\
 C &= 1 \\
 A + C &= 0 \Rightarrow A = -1 \\
 B + C &= 0 \Rightarrow B = -1 \\
 U_{IZ}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1 + s}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2} + \left(s + \frac{1}{2}\right)}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
 U_{IZ}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
 \bullet \\
 u_{iz}(t) &= 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

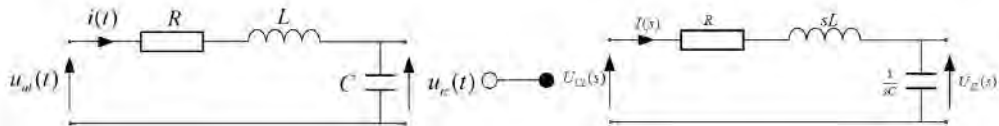


Slika 3.10: Odziv RLC kruga na skokovitu pobudu

Prijenosna funkcija dobivena relacijom (3.73) naziva se PT2S član². To je proporcionalni član 2. reda s nadvišenjem³. Odziv RLC kruga na skokovitu pobudu prikazan je na slici 3.10. Promatrajući relaciju (3.71) može se vidjeti da električne komponente R , L i C poprimaju u Laplaceovoj domeni nove izraze za impedanciju. Transformacija je prikazana na slici 3.11.

²O PT2S članu nešto više u poglavlju 5 *Vremenski odziv osnovnih dinamičkih članova*

³Prebačaj preko vrijednosti u stacionarnom stanju



Slika 3.11: RLC krug: vremenska i Laplaceova domena

Kada se električna shema prebaci iz vremenske u Laplaceovu domenu, naponi i struje računaju se algebarski. Račun u Laplaceovoj domeni iz tog razloga pojednostavljuje račun. Rotacijski sustav sa slike 3.4 ima istu prijenosnu funkciju kao i RLC krug sa slike 3.3 uz zadane parametre izrazom (3.77).

$$G(s) = \frac{\Omega_1(s)}{\Omega_u(s)} = \frac{c_{f1}}{J_1 s^2 + D_1 s + c_{f1}} \Big|_{J_1=1, D_1=1, c_{f1}=1} = \frac{1}{s^2 + s + 1}. \quad (3.75)$$

Rotacijski sustav sa slike 3.6 ima istu prijenosnu funkciju kao i RLC krug sa slike 3.3 uz zadane parametre izrazom (3.76).

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \Big|_{m=1, b=1, k=1} = \frac{1}{s^2 + s + 1}. \quad (3.76)$$

Na jednostavan način opisali smo tri tehnička sustava, jedan elektronički i dva mehanička. Ovime smo završili opis sustava prijenosnom funkcijom u Laplaceovoj domeni.

3.3 Opis sustava varijablama stanja

Varijable stanja definiramo kao minimalni broj unutrašnjih varijabli sustava kojima možemo u potpunosti opisati ponašanje sustava. Kod opisa sustava diferencijalnim jednadžbama i prijenosnom funkcijom rečeno je da je red sustava jednak redu diferencijalne jednadžbe ili redu prijenosne funkcije. Prema tome, broj varijabli stanja jednak je redu diferencijalne jednadžbe ili redu prijenosne funkcije što odgovara broju spremnika energije u sustavu. Opis sustava varijablama stanja sastoji se u tome da se ponašanje dinamičkog sustava umjesto diferencijalnom jednadžbom n -tog reda prikaže sustavom od n diferencijalnih jednadžbi prvog reda [6]. Linearni i vremenski nepromjenjivi sustavi mogu se opisati matričnim oblikom:

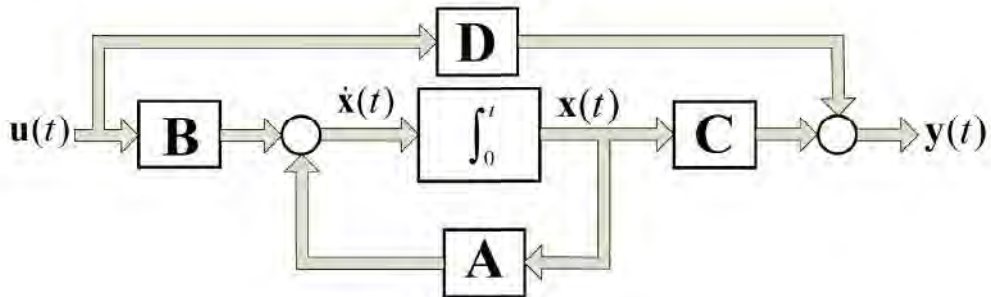
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \end{aligned} \quad (3.77)$$

gdje su:

- \mathbf{A} - matrica sustava (dimenzije $n \times n$)

- **B** - ulazna matrica (dimenzije $n \times p$)
- **C** - izlazna matrica (dimenzije $r \times n$)
- **D** - matrica direktnog preslikavanja ulaza na izlaz (dimenzije $r \times p$)

gdje je n red sustava, p broj ulaza, a r broj izlaza sustava. Na ovaj način mogu se opisivati SISO⁴, MIMO⁵ sustavi i njihove kombinacije.



Slika 3.12: Opis sustava varijablama stanja

Opis sustava varijablama stanja prikazan je slikom 3.12. Slika je direktno dobivena iz relacije (3.77) i nacrtana je u matričnom obliku. Primjenom Laplaceove transformacije na relaciju (3.77) dobit ćemo opis sustava varijablama stanja u Laplaceovoj domeni:

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Prijenosna funkcija definirana je kao omjer izlaza i ulaza sustava pa iz relacije (3.78) slijedi:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) &= \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \Rightarrow \\ \mathbf{X}(s) &= (\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{G}(s) &= \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

U prvoj iteraciji izvoda prijenosne funkcije prvi izraz iz (3.78) množili smo s lijeva (matrično množenje). Dalje se izvod svodi na uvrštavanje varijabli. Pokušajmo sada jedan jednostavan sustav opisati varijablama stanja. Sustav je opisan diferencijalnom jednačinom:

$$y'''(t) + 2y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = u(t). \quad (3.80)$$

⁴Single Input and Single Output

⁵Multiple Input and Multiple Output

Odaberimo sljedeće varijable stanja (s obzirom da je diferencijalna jednadžba trećeg reda, broj varijabli stanja bit će tri):

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\x_2(t) &= y'(t) \\x_3(t) &= y''(t).\end{aligned}\tag{3.81}$$

Prema relaciji 3.77 potrebne su nam i derivacije varijabli stanja:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= y'(t) \\x_2'(t) &= y''(t) \\x_3'(t) &= y'''(t).\end{aligned}\tag{3.82}$$

Potrebno je odrediti sadržaj matrica **A**, **B**, **C** i **D**.

$$\begin{aligned}y'''(t) &= u(t) - 2y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) \\x_1'(t) &= y'(t) = x_2(t) \\x_2'(t) &= y''(t) = x_3(t) \\y'''(t) &= u(t) - 2y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) \\y'''(t) &= u(t) - 2x_3(t) - 3x_2(t) - 4x_1(t) \\x_3'(t) &= y'''(t) = u(t) - 2x_3(t) - 3x_2(t) - 4x_1(t).\end{aligned}\tag{3.83}$$

Koristeći relacije (3.81) i (3.82) i njihovom supstitucijom u diferencijalnu jednadžbu (3.80) dobiven je sustav opisan varijablama stanja (3.83). Potrebno ga je samo opisati u obliku matrica:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + 0u(t) \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = 0.\end{aligned}\tag{3.84}$$

Pokušajmo sada sustav RLC kruga zapisati u obliku varijabli stanja. RLC krug opisan je diferencijalnom jednadžbom (3.19):

$$LCu_{iz}''(t) + RCu_{iz}'(t) + u_{iz}(t) = u_{ul}(t).\tag{3.85}$$

Kao varijable stanja uzmimo sada fizikalne veličine: struju $i(t)$ i napon u_C :

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= u_{iz}(t) \\
 i(t) &= Cu'_{iz}(t) \\
 u'_C(t) &= u'_{iz}(t) = \frac{1}{C}i(t) \\
 i'(t) &= Cu''_{iz}(t) \\
 LCu''_{iz}(t) + RCu'_{iz}(t) + u_{iz}(t) &= u_{ul}(t)/L \\
 Cu''_{iz}(t) + \frac{RC}{L}u'_{iz}(t) + \frac{1}{L}u_{iz}(t) &= \frac{1}{L}u_{ul}(t) \\
 Cu''_{iz}(t) &= \frac{1}{L}u_{ul}(t) - \frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}u_C(t) \\
 i'(t) &= \frac{1}{L}u_{ul}(t) - \frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}u_C(t) \\
 \begin{bmatrix} u'_C(t) \\ i'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u_{ul}(t) \\
 u_{iz}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

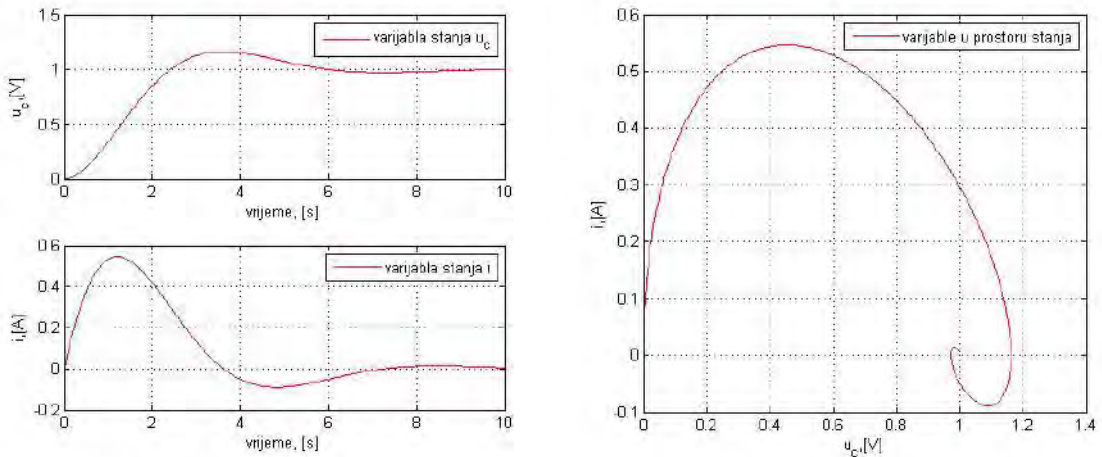
Relacijom (3.87) prikazan je sustav RLC kruga pomoću opisa po varijablama stanja. Prijenosnu funkciju RLC kruga možemo dobiti Laplaceovom transformacijom relacije (3.85):

$$\begin{aligned}
 LCu''_{iz}(t) + RCu'_{iz}(t) + u_{iz}(t) &= u_{ul}(t) \\
 \Downarrow \\
 (LCs^2 + RCs + 1) U_{IZ}(s) &= U_{UL}(s) \Rightarrow \\
 G(s) = \frac{U_{IZ}(s)}{U_{UL}(s)} &= \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}.
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Pokušajmo istu prijenosnu funkciju dobiti korištenjem relacije (3.79):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}(s) &= \frac{\mathbf{U}_{\text{IZ}}(s)}{\mathbf{U}_{\text{UL}}(s)} = \mathbf{C}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\
 \mathbf{G}(s) &= \frac{\mathbf{U}_{\text{IZ}}(s)}{\mathbf{U}_{\text{UL}}(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{G}(s) &= \frac{\mathbf{U}_{\text{IZ}}(s)}{\mathbf{U}_{\text{UL}}(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\
 \left(\begin{bmatrix} s & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \right)^{-1} &= \frac{1}{s(s + \frac{R}{L}) + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s \end{bmatrix} \\
 \mathbf{G}(s) &= \frac{\mathbf{U}_{\text{IZ}}(s)}{\mathbf{U}_{\text{UL}}(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{G}(s) &= \frac{\mathbf{U}_{\text{IZ}}(s)}{\mathbf{U}_{\text{UL}}(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} \\ \frac{s}{L} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{G}(s) &= \frac{\mathbf{U}_{\text{IZ}}(s)}{\mathbf{U}_{\text{UL}}(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}.
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Relacijom (3.88) pokazali smo da se dobije ista prijenosna funkcija sustava na oba navedena načina. To znači da možemo koristiti bilo koji opis sustava prilikom analize sustava automatskog upravljanja. Varijable stanja možemo crtati u prostoru varijabli stanja⁶. Varijable stanja RLC kruga prikazane su na slici 3.13 u prostoru stanja.



Slika 3.13: Varijable u prostoru stanja (RLC krug)

Opisom sustava po varijablama stanja završavamo matematičko modeliranje sustava.

⁶Graf koji daje međuovisnost dviju varijabli stanja

Iako se u nastavku nećemo baviti opisom sustava po varijablama stanja, ne umanjujemo važnost ovog načina opisa sustava automatskog upravljanja. Ovaj opis sustava koristi se kod naprednijih metoda upravljanja kao što su optimalno upravljanje, upravljanje po varijablama stanja, prediktivno upravljanje. O tome više možete pronaći u literaturi [7], [8].

Poglavlje 4

Algebra blokova u sustavu automatskog upravljanja

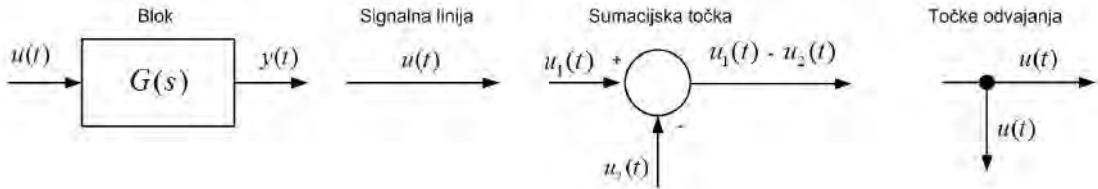
4.1 Blok dijagrami

Blok dijagrami [9] su grafički reprezentanti sustava automatskog upravljanja. Oni opisuju veze između pojedinih komponenata sustava na jednostavan način. U analizi i sintezi sustava automatskog upravljanja često je prvi korak opisivanje matematičkih modela sustava blokovima koji imaju funkcionalnu vezu između ulaza i izlaza tog bloka. Blok dijagramima prikazuje se tijek signala od jednog bloka prema drugom bloku.

Osnovni simboli koji se koriste u opisu sustava blok dijagramima su [1]:

- blok - predstavlja vezu između ulazne i izlazne veličine. Njime se opisuju osnovi dinamički članovi.
- signalne linije - to su linije sa strelicama kojima se prikazuje tok signala. Njima se povezuju ostale komponente blok dijagrama.
- sumacijske točke - krug koji služi za zbrajanje i oduzimanje dvaju i više signala.
- točke odvajanja - točka na signalnoj liniji koja označava odvajanje signala prema nekom bloku ili sumacijskoj točki.

Osnovni simboli blok dijagrama prikazani su na slici 4.1.



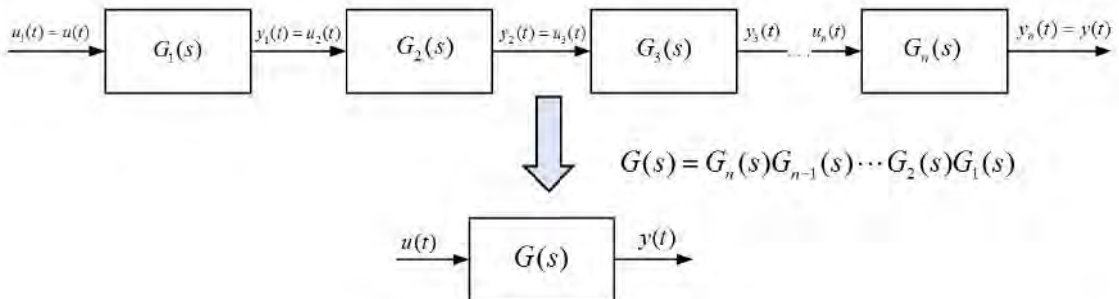
Slika 4.1: Osnovni simboli u blok dijagramima

4.2 Algebra blokova

U nastavku ćemo obraditi algebru blokova i pravila prema kojima se računaju prijenosne funkcije sustava. Navest ćemo samo osnovna pravila, a ostala se pravila mogu izvesti iz osnovnih pravila.

4.2.1 Serijsko povezivanje blokova

Serijsko povezivanje blokova često se u literaturi naziva i kaskadno povezivanje. Kada imamo sustav s n serijski povezanih blokova, tada je moguće pronaći prijenosnu funkciju kojom se opisuje cijeli sustav s n serijski povezanih blokova. Serijski povezani blokovi prikazani su na slici 4.2.



Slika 4.2: Serijski spoj blokova

Prijenosne funkcije $G_1(s), G_2(s), \dots, G_n(s)$ definirane su kao:

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)}, G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)}, \dots, G_n(s) = \frac{Y_n(s)}{U_n(s)}. \quad (4.1)$$

Sa slike 4.2 mogu se iščitati sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= U_2(s), Y_2(s) = U_3(s), \dots, Y_{n-1}(s) = U_n(s) \\ U_1(s) &= U(s), Y_n(s) = Y(s). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Izraz (4.1) možemo napisati u sljedećem obliku:

$$Y_1(s) = G_1(s)U_1(s), Y_2(s) = G_2(s)U_2(s), \dots Y_n(s) = G_n(s)U_n(s). \quad (4.3)$$

Ako napravimo supstituciju u izrazu (4.3) s izrazima (4.2) dobit ćemo:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= G_1(s)U_1(s) = G_1(s)U(s) \\ Y_2(s) &= G_2(s)U_2(s) = G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U(s) \\ Y_3(s) &= G_3(s)U_3(s) = G_3(s)Y_2(s) = G_3(s)G_2(s)G_1(s)U(s) \\ &\vdots \\ Y(s) &= Y_n(s) = G_n(s)U_n(s) = G_n(s)Y_{n-1}(s) = G_n(s)G_{n-1}(s) \cdots G_1(s)U(s). \end{aligned} \quad (4.4)$$

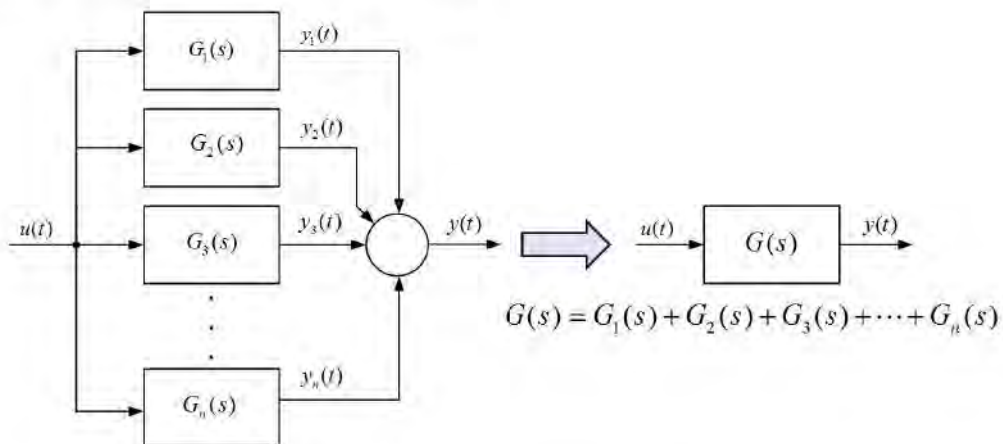
Prijenosna funkcije serijskog spoja blokova sa slike 4.2 na temelju izraza (4.4) je:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_n(s)G_{n-1}(s) \cdots G_2(s)G_1(s). \quad (4.5)$$

Prijenosna funkcija serijskog spoja blokova odgovara umnošku prijenosnih funkcija pojedinih blokova serijskog spoja blokova.

4.2.2 Paralelno povezivanje blokova

Kada imamo sustav s n paralelno povezanih blokova, tada je moguće pronaći prijenosnu funkciju kojom se opisuje cijeli sustav s n paralelno povezanih blokova. Paralelno povezani blokovi prikazani su na slici 4.3.



Slika 4.3: Paralelni spoj blokova

Prijenosne funkcije $G_1(s), G_2(s), \dots, G_n(s)$ definirane su izrazom (4.6):

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)}, G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)}, \dots, G_n(s) = \frac{Y_n(s)}{U(s)}. \quad (4.6)$$

Izlaz sustava sa slike 4.3 je:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) + \cdots + Y_n(s). \quad (4.7)$$

Izraz (4.6) može se zapisati kao:

$$Y_1(s) = G_1(s)U(s), Y_2(s) = G_2(s)U(s), \dots, Y_n(s) = G_n(s)U(s). \quad (4.8)$$

Iskoristimo li jednakosti iz izraza (4.8) za računanje izraza (4.7) dobit ćemo:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) + G_3(s)U(s) + \cdots + G_n(s)U(s) \\ Y(s) &= (G_1(s) + G_2(s) + G_3(s) + \cdots + G_n(s))U(s). \end{aligned} \quad (4.9)$$

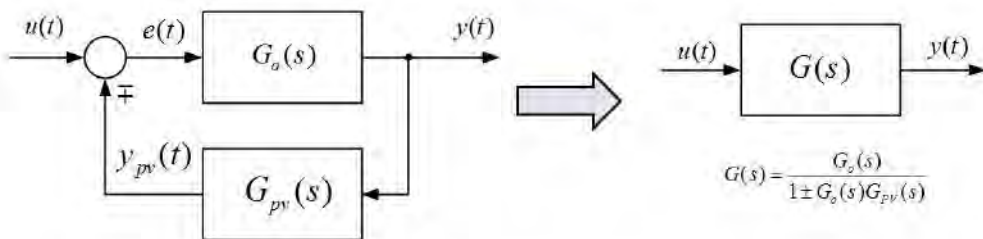
Prijenosna funkcije paralelnog spoja blokova sa slike 4.3 na temelju izraza (4.9) je:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s) + \cdots + G_n(s). \quad (4.10)$$

Prijenosna funkcija paralelnog spoja blokova odgovara zbroju pojedinih blokova paralelnog spoja blokova.

4.2.3 Povratna veza

Povratna veza je neophodna u sustavima automatskog upravljanja. Povratni signal može djelovati na ulazni signal negativno (s negativnim predznakom) ili pozitivno (s pozitivnim predznakom). Prema tome, razlikovat ćemo negativnu i pozitivnu povratnu vezu. Negativna povratna veza koristi se u sustavima automatske regulacije, a pozitivna povratna veza u oscilatorima. Povratna veza prikazana je na slici 4.4.



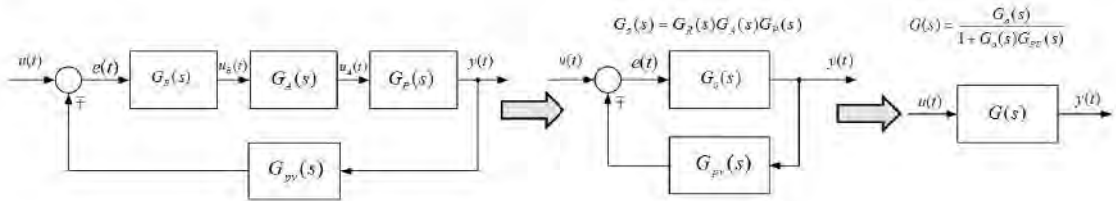
Slika 4.4: Povratna veza

Kao i u prethodna dva slučaja, i ovdje je moguće povratnu vezu opisati jednom prijenosnom funkcijom. Prijenosna funkcija sustava s povratnom vezom često će se koristiti prilikom ispitivanja stabilnosti sustava automatskog upravljanja¹. Sustav s povratnom vezom sa slike 4.4 u automatskom upravljanju naziva se i zatvoreni krug automatskog upravljanja koji je sačinjen od dva bloka:

¹Nešto više o stabilnosti u poglavlju 7 *Analiza stabilnosti sustava automatskog upravljanja*

- $G_o(s)$ - prijenosna funkcija otvorenog sustava automatskog upravljanja;
- $G_{pv}(s)$ - prijenosna funkcija povratne veze (član povratne veze).

U slučaju da u otvorenom krugu postoji serijski spoj više prijenosnih funkcija, tada je $G_o(s)$ prema relaciji (4.5) umnožak svih prijenosnih funkcija u otvorenom krugu (slika 4.5).



Slika 4.5: Otvoreni krug (serijski povezane prijenosne funkcije)

Izlazni signal povratne veze sa slike 4.4 moguće je zapisati na sljedeći način:

$$Y(s) = G_o(s)E(s). \quad (4.11)$$

Signal pogreške $E(s)$ dobit ćemo tako da izračunamo razliku ulaznog signala $U(s)$ i signala povratne veze $Y_{PV}(s)$:

$$E(s) = U(s) \mp Y_{PV}(s). \quad (4.12)$$

Signal povratne veze $Y_{PV}(s)$ rezultat je prolaska izlaznog signala kroz član povratne veze $G_{PV}(s)$:

$$Y_{PV}(s) = G_{PV}(s)Y(s). \quad (4.13)$$

Matematičkim manipulacijama, koristeći prethodna tri izraza, dobit ćemo ovisnost izlaza sustava $Y(s)$ o ulazu u sustav $U(s)$:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_o(s)E(s) = G_o(s)(U(s) \mp Y_{PV}(s)) = G_o(s)(U(s) \mp G_{PV}(s)Y(s)) \\ Y(s) &= G_o(s)U(s) \mp G_o(s)G_{PV}(s)Y(s) \Rightarrow Y(s) \pm G_o(s)G_{PV}(s)Y(s) = G_o(s)U(s) \\ Y(s)(1 \pm G_o(s)G_{PV}(s)) &= G_o(s)U(s). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Na temelju izraza (4.14) možemo dobiti prijenosnu funkciju negativne povratne veze:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)G_{PV}(s)} \quad (4.15)$$

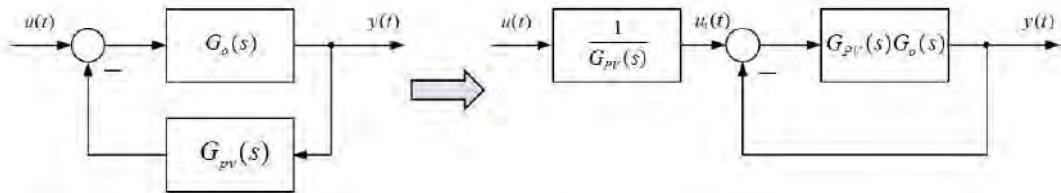
i pozitivne povratne veze:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_o(s)}{1 - G_o(s)G_{PV}(s)}. \quad (4.16)$$

U slučaju da je povratna veza jedinična ($G_{PV} = 1$), dobit ćemo sljedeći izraz za prijenosnu funkciju sustava s negativnom povratnom vezom (u nastavku teksta i u sljedećim poglavljima pod pojmom povratna veza podrazumijeva se negativna povratna veza):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}. \quad (4.17)$$

Sustav sa slike 4.4 može se pretvoriti u sustav s jediničnom povratnom vezom (slika 4.6). Da bi se ostvarila ta transformacija, potrebno je blok povratne veze $G_{PV}(s)$ provući kroz sumator. S obzirom da smo u tom slučaju signal $u(t)$ pomnožili s blokom povratne veze $G_{PV}(s)$ sada ga je potrebno podijeliti s tim blokom.

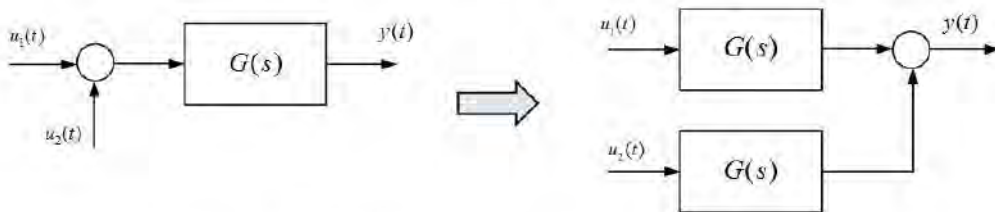


Slika 4.6: Pretvorba zatvorenog sustava u sustav s jediničnom povratnom vezom

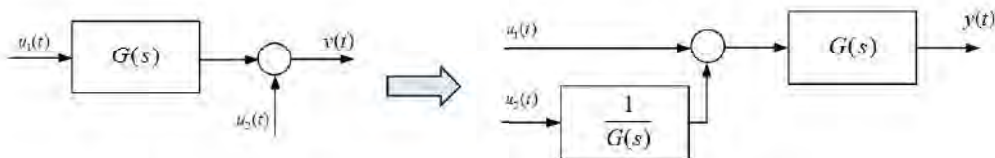
Povratna veza u sustavu automatskog upravljanja omogućuje praćenje izlazne veličine sustava. Na taj način možemo upravljačkim algoritmima održavati izlaznu veličinu u željenim granicama (upravljati izlaznom veličinom).

4.2.4 Provlačenje sumacijske točke kroz blok

Sumacijsku točku možemo provući desno (slika 4.7) ili lijevo (slika 4.8) kroz blok.



Slika 4.7: Provlačenje sumacijske točke desno kroz blok



Slika 4.8: Provlačenje sumacijske točke lijevo kroz blok

Za sliku 4.7 (lijevo) vrijedi:

$$Y(s) = (U_1(s) + U_2(s))G(s), \quad (4.18)$$

Izraz (4.18) možemo zapisati na sljedeći način:

$$Y(s) = U_1(s)G(s) + U_2(s)G(s), \quad (4.19)$$

što je prikazano na slici 4.7 (desno). Za sliku 4.8 (lijevo) vrijedi:

$$Y(s) = U_1(s)G(s) + U_2(s). \quad (4.20)$$

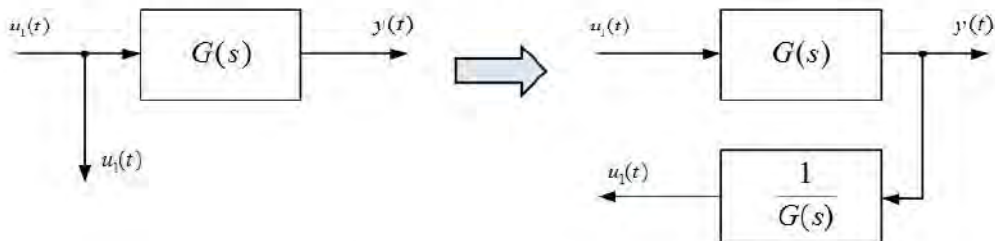
Izraz (4.20) možemo zapisati na sljedeći način:

$$Y(s) = U_1(s)G(s) + U_2(s)\frac{G(s)}{G(s)} = \left(U_1(s) + U_2(s)\frac{1}{G(s)} \right) G(s) \quad (4.21)$$

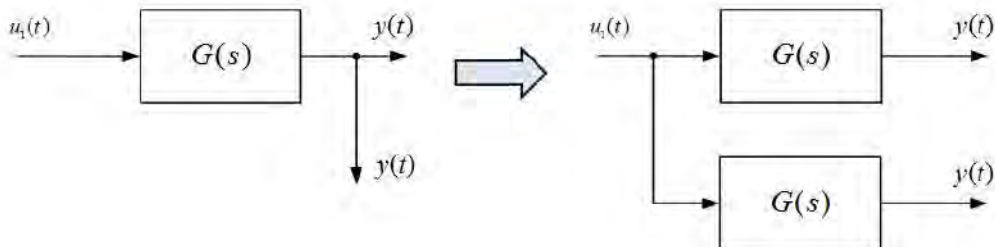
što je prikazano na slici 4.8 (desno).

4.2.5 Provlačenje točke odvajanje kroz blok

Točku odvajanja možemo provući desno (slika 4.9) ili lijevo (slika 4.10) kroz blok.



Slika 4.9: Provlačenje točke odvajanje desno kroz blok



Slika 4.10: Provlačenje točke odvajanje lijevo kroz blok

Za sliku 4.9 (lijevo) vrijedi:

$$Y(s) = U_1(s)G(s). \quad (4.22)$$

Izraz (4.18) može se napisati kao:

$$Y(s) = U_1(s) \frac{1}{G(s)} \quad (4.23)$$

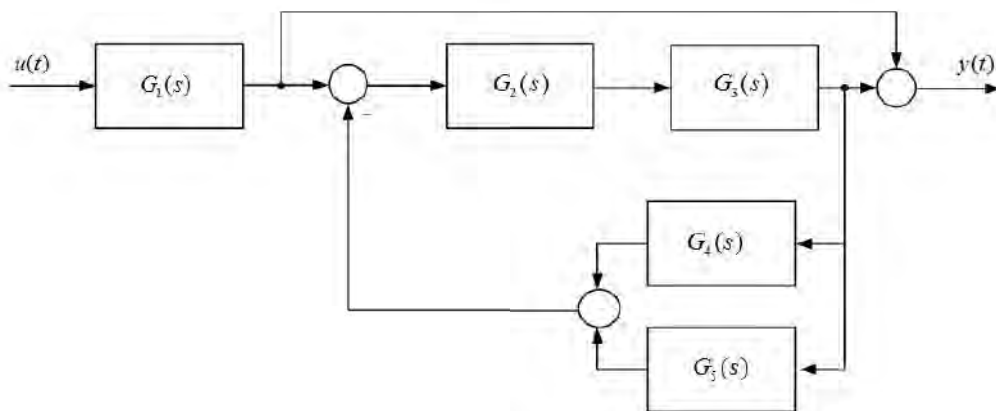
što je prikazano na slici 4.9 (desno). Za sliku 4.10 (lijevo) vrijedi:

$$Y(s) = U_1(s)G(s). \quad (4.24)$$

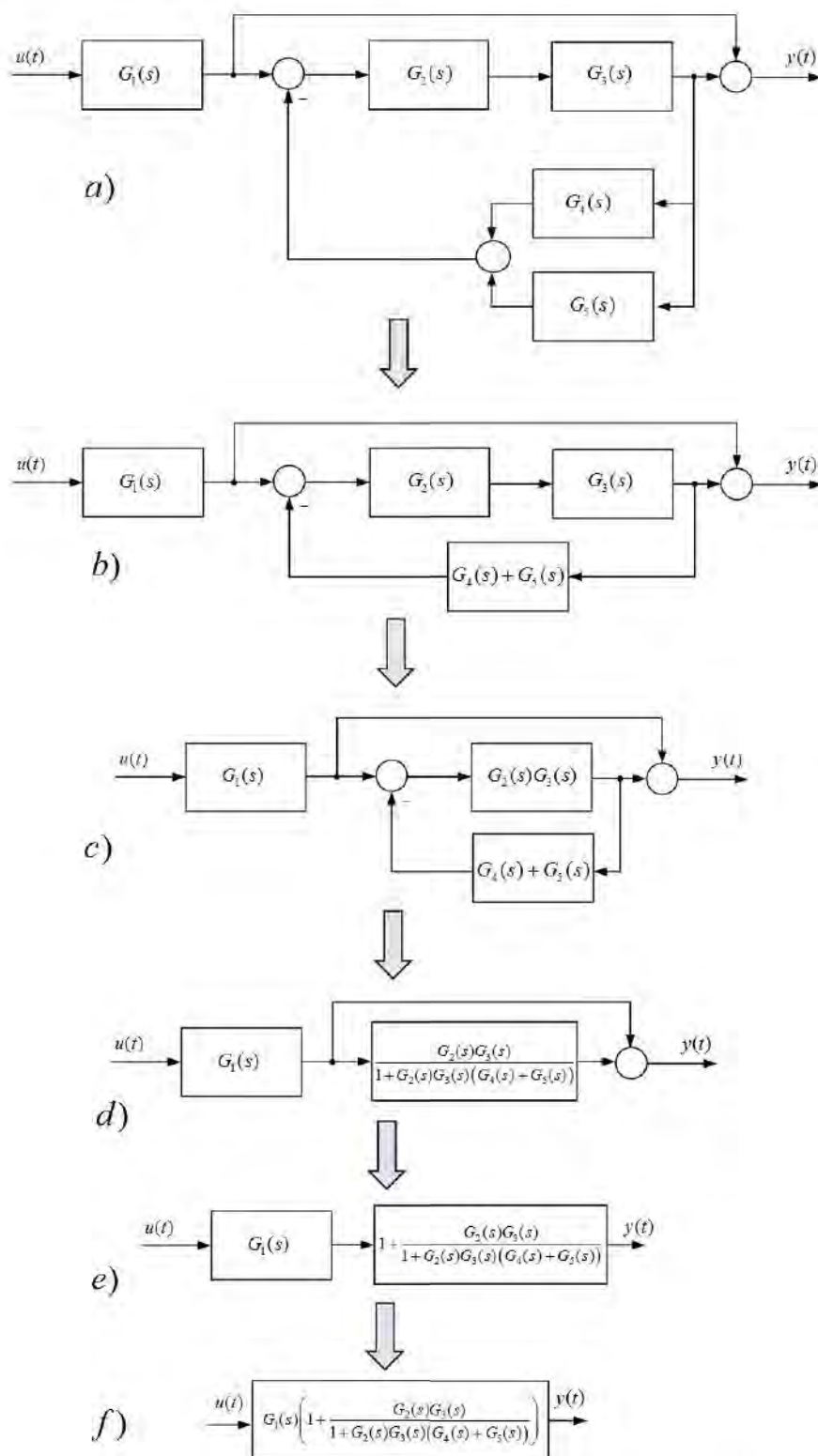
Ako provučemo točku odvajanja lijevo kroz blok, dobije se dvostruki izlaz što je prikazano na slici 4.10 (desno).

4.2.6 Primjena algebre blokova na primjerima sustava automatskog upravljanja

Znanja koja smo stekli iz algebre blokova pokušajmo sada primijeniti na dva primjera sustava automatskog upravljanja. Potrebno je naći prijenosnu funkciju sustava sa slike 4.11.



Slika 4.11: Sustav automatskog upravljanja (1)



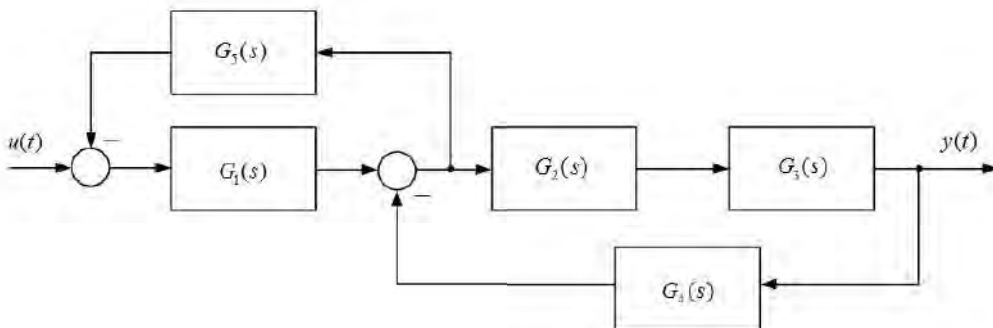
Slika 4.12: Sustav automatskog upravljanja (1) - blok algebra

Postupak rješavanja blokovske algebre sustava automatskog upravljanja sa slike 4.11 prikazan je na slici 4.12. Na slici 4.12 b) prikazan je rezultat primjene pravila za paralelno povezivanje blokova $G_4(s)$ i $G_5(s)$, a na slici 4.12 c) rezultat primjene pravila za serijski povezane blokove $G_2(s)$ i $G_3(s)$. Nakon toga primijenjena su pravila za povratnu vezu (slika 4.12 d)) te ponovno pravila za paralelni spoj blokova (slika 4.12 e)). Kod prethodnog paralelnog povezivanja blokova možemo zaključiti da je jedan od blokova jedinični te ga nije potrebno navoditi kao blok, već samo kao signalnu liniju. Slika 4.12 f) prikazuje konačnu prijenosnu funkciju početnog sustava, dobivenu pravilima za serijsko povezivanje blokova sa slike 4.12 e). Prijenosna funkcija sustava sa slike 4.11 je:

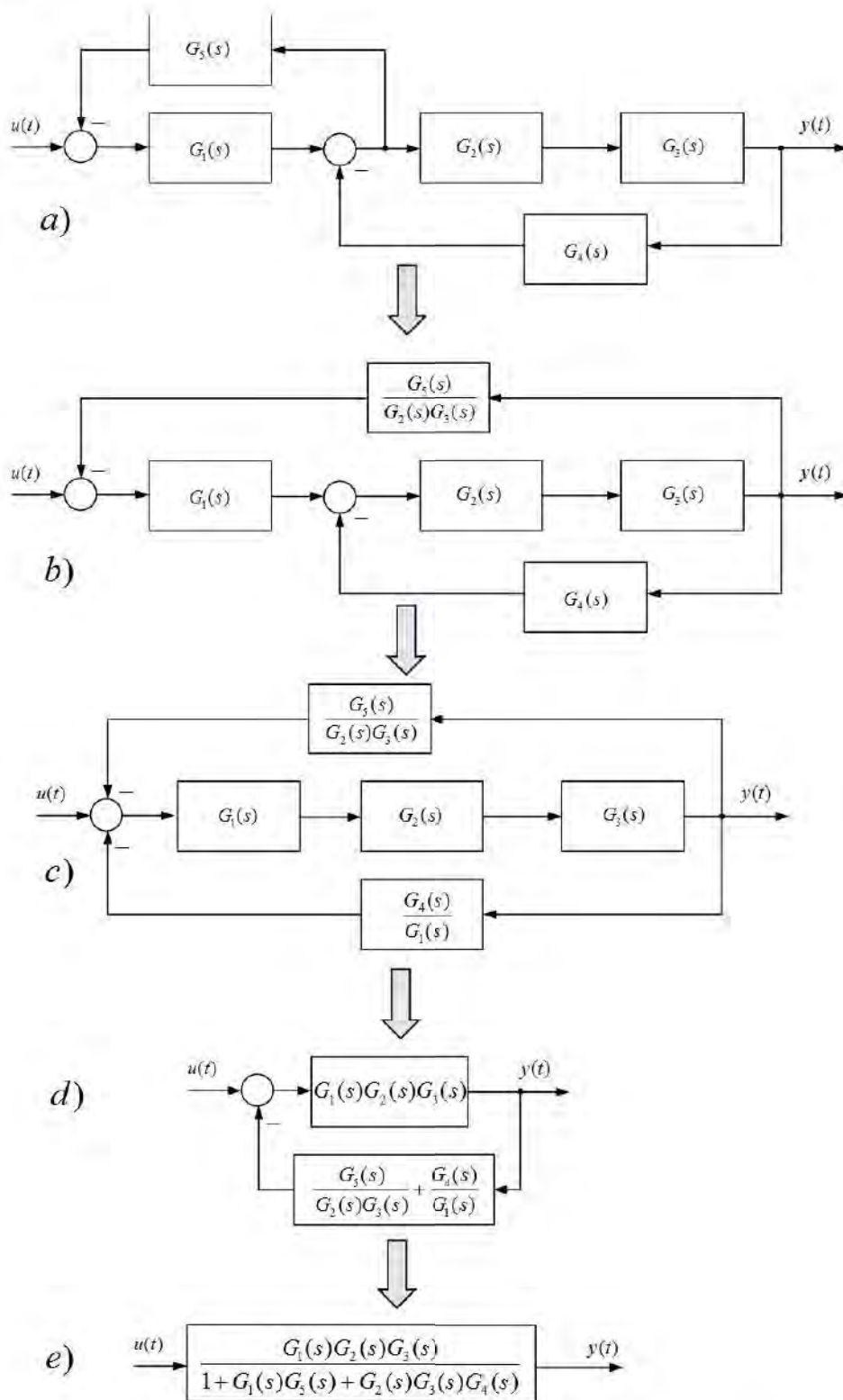
$$G(s) = G_1(s) \left(1 + \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)(G_4(s) + G_5(s))} \right). \quad (4.25)$$

Drugi primjer složenog sustava automatskog upravljanja prikazan je na slici 4.13. Postupak rješavanja blokovske algebre sustava automatskog upravljanja sa slike 4.13 prikazan je na slici 4.14. Na slici 4.14 b) prikazan je rezultat provlačenja točke odvajanja kroz blokove $G_2(s)$ i $G_3(s)$. Zatim je kroz sumacijsku točku provučen blok $G_1(s)$ (slika 4.14 c)). Na slici 4.14 d) prikazan je rezultat primjene pravila za serijsko i paralelno povezivanje blokova, a na slici 4.14 e) prikazana je konačna prijenosna funkcija početnog sustava dobivena pravilima za povratnu vezu. Prijenosna funkcija sustava sa slike 4.13 je:

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_5(s) + G_2(s)G_3(s)G_4(s)}. \quad (4.26)$$



Slika 4.13: Sustav automatskog upravljanja (2)



Slika 4.14: Sustav automatskog upravljanja (2) - blok algebra

Primjenom pravila algebre blokova na dva složena sustava automatskog upravljanja završavamo poglavlje koje se bavi algebrom blokova u sustavu automatskog upravljanja. U sljedećem poglavlju blokovima ćemo dodijeliti karakteristične prijenosne funkcije koje sačinjavaju sustav automatskog upravljanja.

Poglavlje 5

Vremenski odziv osnovnih dinamičkih članova

Složeniji tehnički sustavi koji sadrže mjerne članove, aktuatore (pojačala snage) i razne sustavne cjeline, u opisu sustava često se razlažu na podsustave. Svaki podsustav možemo opisati nekim dinamičkim članom. Dinamičke članove opisat ćemo u nastavku. Osnovni dinamički članovi su:

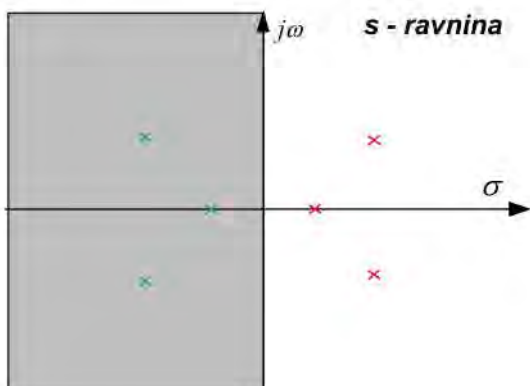
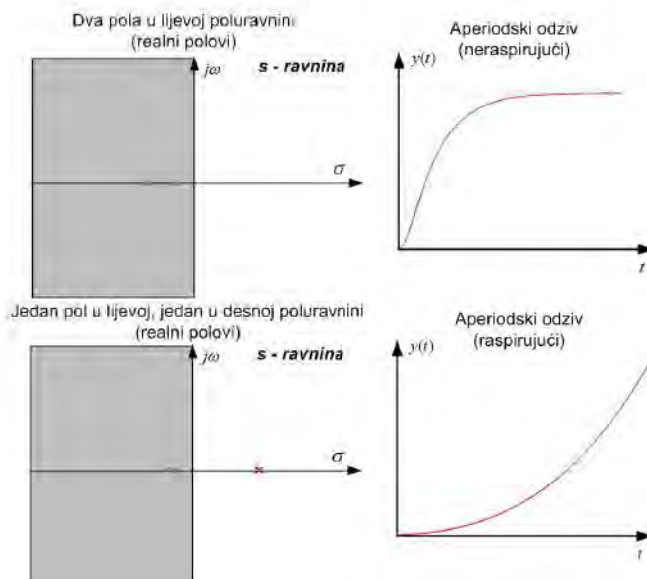
- Proporcionalni član nultog reda (P0 član)
- Proporcionalni član prvog reda (PT1 član)
- Proporcionalni član drugog reda (PT2 član)
- Proporcionalni član drugog reda s prigušenim oscilatornim ponašanjem (PT2S član)
- Derivacijski član (D član)
- Integralni član (I član)
- Član s transportnim kašnjenjem.

Kombinacijom osnovnih dinamičkih članova možemo opisati sve linearne sustave. U daljnjim izlaganjima ulaz u sustav označavat ćemo s $u(t)$, a izlaz sustava s $y(t)$.

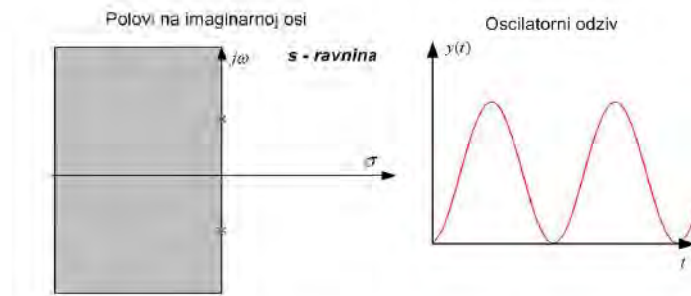
5.1 Odziv sustava s obzirom na položaj polova

Kod inverzne Laplaceove transformacije spomenuli smo polove i nule sustava. Polovi sustava su nultočke nazivnika prijenosne funkcije. Kompleksna varijabla s definirana je kao $s = \sigma + j\omega$. Položaj polova može se nacrtati u s - ravnini gdje se na os apscisu crta realni dio kompleksne varijable s (σ), a na osi ordinata imaginarni dio kompleksne

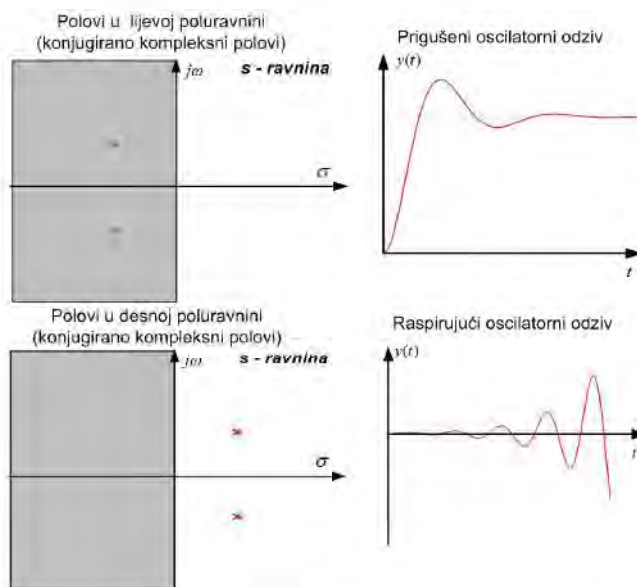
varijable s (ω). S - ravnina prikazana je na slici 5.1. Polove ćemo označavati s križićem x . Ako su svi polovi sustava u lijevoj poluravnini s -ravnine (sivo označeno na slici 5.1), odziv sustava biti će stabilan. Ako je samo jedan pol u desnom dijelu s -ravnine, odziv sustava će se raspirivati (težiti u beskonačno) (slika 5.2 dolje). Ako polovi imaju i realnu i imaginarnu komponentu, tada će sustav imati prigušeni oscilatorni odziv (slika 5.4 gore), odnosno raspirujući oscilatorni odziv (slika 5.4 dolje). Nadalje, ako se polovi nalaze na $j\omega$ osi sustav će imati čisti oscilatorni odziv bez prigušenja (slika 5.3). Kompleksni polovi uvijek se pojavljuju u konjugirano kompleksnim parovima. Ako polovi imaju samo realnu komponentu, odziv sustava naziva se aperijski (slika 5.2).

Slika 5.1: Polovi u s - ravnini

Slika 5.2: Aperijski odziv sustava



Slika 5.3: Oscilatorni odziv sustava



Slika 5.4: Prigušeni i raspirujući oscilatorni odziv sustava

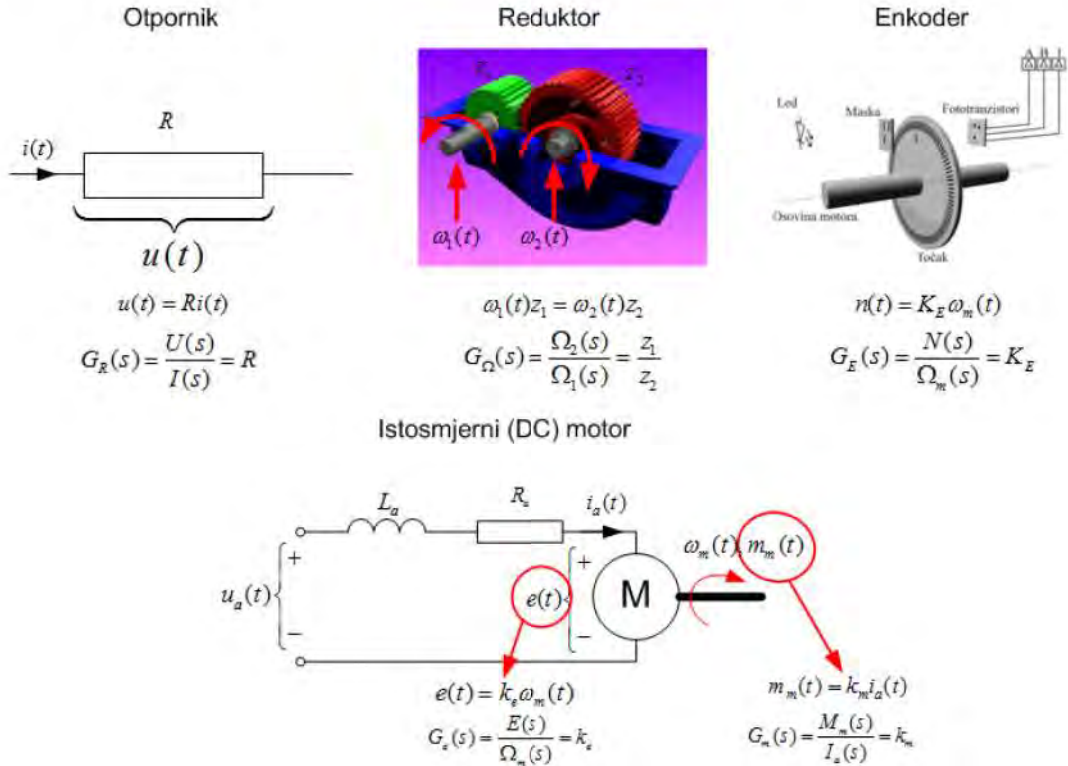
5.2 Proporcionalni član nultog reda (P0 član)

Proporcionalni član nultog reda (u daljnjem tekstu samo P0 član) je član koji ne posjeduje dinamiku. Ulazna veličina se trenutno preslikava na izlaz s određenim pojačanjem. Diferencijalna jednadžba P0 člana je:

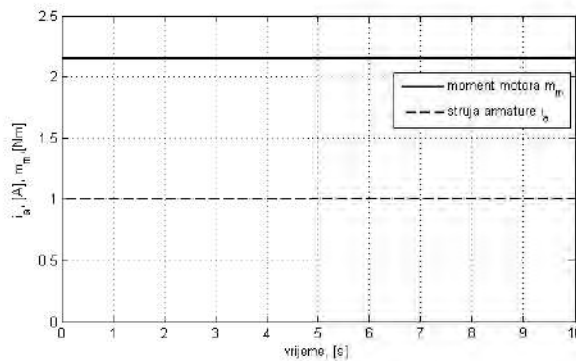
$$y(t) = Ku(t). \quad (5.1)$$

Primjenom Laplaceove transformacije na izraz (5.1), dobit ćemo prijenosnu funkciju P0 člana:

$$Y(s) = KU(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K. \quad (5.2)$$



Slika 5.5: Praktični primjeri P0 članova

Slika 5.6: Prijelazna funkcija P0 člana s pojačanjem $k_m = 2.12$

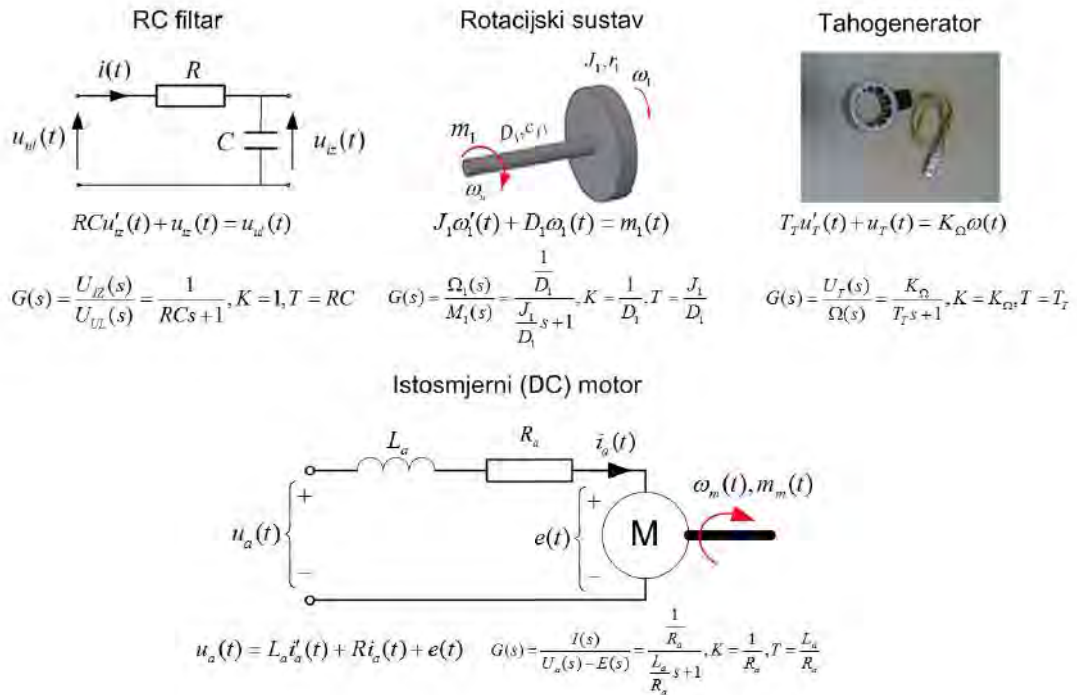
Ako se zanemare nelinearnosti, u praksi se može naći veliki broj P0 članova. Na slici 5.5 prikazani su samo neki od P0 članova kao što su otpornik, reduktor, enkoder i dva podsustava istosmjernog motora. Za svaki član napisana je njegova diferencijalna jednadžba i prijenosna funkcija. Napon na otporniku proporcionalan je struji koja teče kroz njega. Kod reduktora će brzina zupčanika ovisiti o prijenosnom omjeru odnosno

o odnosu broja zubi pogonskog zupčanika z_1 i broja zubi gonjenog zupčanika z_2 . Kod enkodera je broj impulsa generiranih fototranzistorom proporcionalna s brzinom vrtnje osovine na koju je spojen enkoder. Kod istosmjernog motora protuelektromotorna sila $e(t)$ proporcionalna je brzini vrtnje osovine motora $\omega_m(t)$, a moment motora $m_m(t)$ proporcionalan je struji armature motora $i_a(t)$.

Na slici 5.6 prikazana je prijelazna funkcija momenta motora $m_m(t)$. Prijelazna funkcija 5.6 može se primijeniti na svaki P0 član.

5.3 Proporcionalni član prvog reda (PT1 član)

Proporcionalni član prvog reda (u daljnjem tekstu samo PT1 član) ima vremensko usporjenje prvog reda što znači da posjeduje samo jednu vremensku konstantu T . Koeficijent pojačanja sustava je K . PT1 član je aperiodski član¹.



Slika 5.7: Praktični primjeri PT1 članova

Diferencijalna jednadžba PT1 člana je:

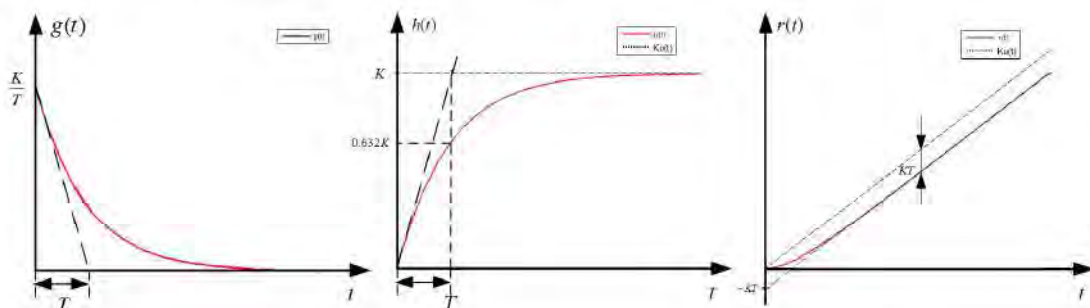
$$Ty'(t) + y(t) = Ku(t). \quad (5.3)$$

¹U prijelaznoj funkciji nema oscilatornog ponašanja

Primjenom Laplaceove transformacije na izraz (5.3) dobit ćemo prijenosnu funkciju PT1 člana:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}. \quad (5.4)$$

Mnogi dinamički sustavi opisani su PT1 članovima, a najčešće su to mjerni senzori. Nekoliko primjera PT1 člana prikazano je na slici 5.7. RC filter i rotacijski sustav opisali smo u poglavlju 3. Često je u sustavima potrebno održavati referentnu brzinu vrtnje nekog mehanizma. Mjerenje brzine moguće je pomoću tahogeneratora. Njegova prijenosna funkcija također je PT1 član. Armaturni krug istosmjernog motora također ima prijenosnu funkciju PT1 člana. Izlazna veličina ove prijenosne funkcije je armaturna struja koja pomnožena konstantom (P0 član) generira moment motora. Za općeniti PT1 odredit ćemo težinsku i prijelaznu funkciju te odziv na jediničnu rampu. Težinsku funkciju označavat ćemo s $g(t)$, prijelaznu funkciju s $h(t)$, a odziv sustava na jediničnu rampu s $r(t)$. Svi odzivi prikazani su na slici 5.8.



Slika 5.8: Težinska funkcija, prijelazna funkcija i odziv na rampu PT1 člana

Vremenska konstanta T može se odrediti iz grafova sa slike 5.8. Iz težinske funkcije vremenska konstanta T određuje se tako da se povuče tangenta na težinsku funkciju iz točke $g(0)$. Vrijeme u kojem tangenta siječe vremensku os predstavlja vremensku konstantu T . Iz prijelazne funkcije može se odrediti vremenska konstanta T na način da se povuče tangenta u točki $h(0)$ na prijelaznu funkciju. Vrijeme u kojem tangenta siječe stacionarnu vrijednost $y(T) = K$ predstavlja vremensku konstantu T . Težinska funkcija PT1 člana $g(t)$ prikazana je relacijom (5.5) (slika 5.8):

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} = \frac{\frac{K}{T}}{s + \frac{1}{T}} \quad (5.5)$$

$$g(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Prijelazna funkcija PT1 člana $h(t)$ prikazana je relacijom (5.6), (slika 5.8):

$$\begin{aligned}
 H(s) &= G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{Ts+1} \frac{1}{s} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s + \frac{1}{T}} \\
 \Downarrow \\
 h(t) &= K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Odziv na jediničnu rampu PT1 člana $r(t)$ prikazan je relacijom (5.7) (slika 5.8):

$$\begin{aligned}
 R(s) &= G(s) \frac{1}{s^2} = \frac{K}{Ts+1} \frac{1}{s^2} = \frac{K}{s^2} - KT \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right) \\
 \Downarrow \\
 r(t) &= Kt - KT \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Za provjeru ispravnosti prethodnih izraza moguće je napraviti provjeru. Naime, težinska funkcija PT1 člana derivacija je prijelazne funkcije PT1 člana, a prijelazna funkcija PT1 člana derivacija je odziva PT1 člana na jediničnu rampu, odnosno:

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}, H(s) = G(s) \frac{1}{s} \Rightarrow G(s) = sH(s) \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad g(t) = h'(t). \tag{5.8}$$

Relacija (5.8) dobivena je prema pravilu o derivaciji originala koje odgovara množenju slike sa s . Ovo pravilo može se primijeniti na bilo koji sustav. Pokušajte sami pokazati da je prijelazna funkcija sustava derivacija odziva sustava na jediničnu rampu.

5.4 Proporcionalni član drugog reda (PT2 član)

Proporcionalni član drugog reda (u daljnjem tekstu samo PT2 član) ima vremensko usporenje drugog reda što znači da posjeduje dvije vremenske konstante T_1 i T_2 . Koeficijent pojačanja sustava je K . PT2 član je aperiodski član². Diferencijalna jednadžba PT2 člana je:

$$T_1 T_2 y''(t) + (T_1 + T_2) y'(t) + y(t) = K u(t). \tag{5.9}$$

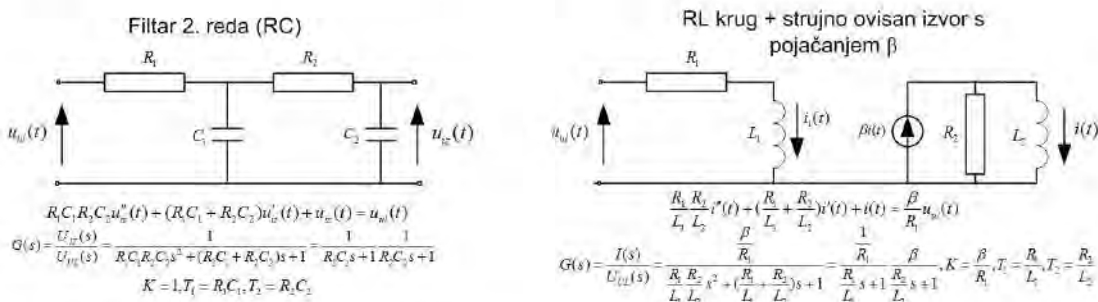
Primjenom Laplaceove transformacije na izraz (5.9) dobit ćemo prijenosnu funkciju PT2 člana:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}. \tag{5.10}$$

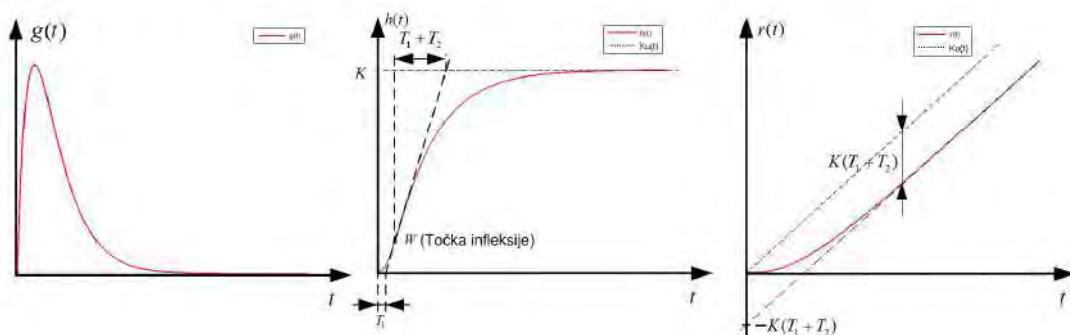
Iz izraza (5.10) vidimo da je PT2 član ništa drugo, nego umnožak dvaju PT1 članova. Ovom analogijom možemo zaključiti da će PT n članovi (proporcionalni članovi n -tog reda) biti umnošci n PT1 članova. PT n članovi izlaze izvan opsega osnovnih dinamičkih članova pa ih ovdje nećemo opisivati. Na slici 5.9 prikazana su dva primjera PT2

²U prijelaznoj funkciji nema oscilatornog ponašanja

člana. Prvi je primjer RC filter drugog reda s naponski ovisnim izvorom. Drugi primjer prikazuje strujni izvor strujno ovisan o struji induktiviteta $i_1(t)$ RL kruga.



Slika 5.9: Praktični primjeri PT2 članova



Slika 5.10: Težinska funkcija, prijelazna funkcija i odziv na rampu PT2 člana

Težinska funkcija PT2 člana $g(t)$ prikazana je relacijom (5.11), (slika 5.10):

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(\frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} - \frac{1}{s + \frac{1}{T_2}} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$g(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$
(5.11)

Prijelazna funkcija PT2 člana $h(t)$ prikazana je relacijom (5.12), (slika 5.10):

$$H(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \frac{1}{s} = \frac{K}{s} - \left(\frac{\frac{KT_1}{T_1 - T_2}}{s + \frac{1}{T_1}} - \frac{\frac{KT_2}{T_1 - T_2}}{s + \frac{1}{T_2}} \right)$$

(5.12)

$$h(t) = K \left(1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right).$$

Odziv na jediničnu rampu PT2 člana $r(t)$ prikazan je relacijom (5.13) (slika 5.10):

$$R(s) = G(s) \frac{1}{s^2} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \frac{1}{s^2} = \frac{K}{s^2} - \frac{K(T_1 + T_2)}{s} + \left(\frac{\frac{KT_1^2}{T_1 - T_2}}{s + \frac{1}{T_1}} - \frac{\frac{KT_2^2}{T_1 - T_2}}{s + \frac{1}{T_2}} \right)$$

(5.13)

$$r(t) = K \left(t - (T_1 + T_2) + \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_1^2 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2^2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right).$$

Ako je $T_1 = T_2 = T$ težinska funkcija, prijelazna funkcija i odziv sustava na jediničnu rampu bitno se mijenjaju. Težinska funkcija PT2 člana $g(t)$ uz $T_1 = T_2 = T$ prikazana je relacijom (5.14):

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2} = \frac{K}{T^2 \left(s + \frac{1}{T} \right)^2}$$

(5.14)

$$g(t) = \frac{K}{T^2} t e^{-\frac{t}{T}}.$$

Prijelazna funkcija PT2 člana $g(t)$ uz $T_1 = T_2 = T$ prikazana je relacijom (5.15):

$$H(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{(Ts + 1)^2} \frac{1}{s} = \frac{K}{s} - \frac{K}{T \left(s + \frac{1}{T} \right)^2} - \frac{K}{s + \frac{1}{T}}$$

(5.15)

$$h(t) = K \left(1 - \frac{1}{T} t e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Odziv na jediničnu rampu PT2 člana $r(t)$ uz $T_1 = T_2 = T$ prikazan je relacijom (5.16):

$$R(s) = G(s) \frac{1}{s^2} = \frac{K}{(Ts + 1)^2} \frac{1}{s^2} = \frac{K}{s^2} - \frac{2KT}{s} - \frac{K}{\left(s + \frac{1}{T} \right)^2} + \frac{2KT}{s + \frac{1}{T}}$$

(5.16)

$$r(t) = K \left(t - 2T + t e^{-\frac{t}{T}} + 2T e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

5.5 Proporcionalni član drugog reda s prigušenim oscilatornim ponašanjem (PT2S član)

Proporcionalni član drugog reda s prigušenim oscilatornim ponašanjem (u daljenjem tekstu PT2S član) nema aperiodski odziv, već odziv s prigušenim oscilatornim ponašanjem. Diferencijalna jednadžba PT2S člana je:

$$y''(t) + 2\zeta\omega_n y'(t) + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 u(t) \quad (5.17)$$

gdje je:

- ζ – faktor prigušenja
- ω_n – prirodna frekvencija sustava³, [rad/s]
- K – koeficijent pojačanja sustava.

Primjenom Laplaceove transformacije na izraz (5.17) dobit ćemo prijenosnu funkciju PT2S člana:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (5.18)$$

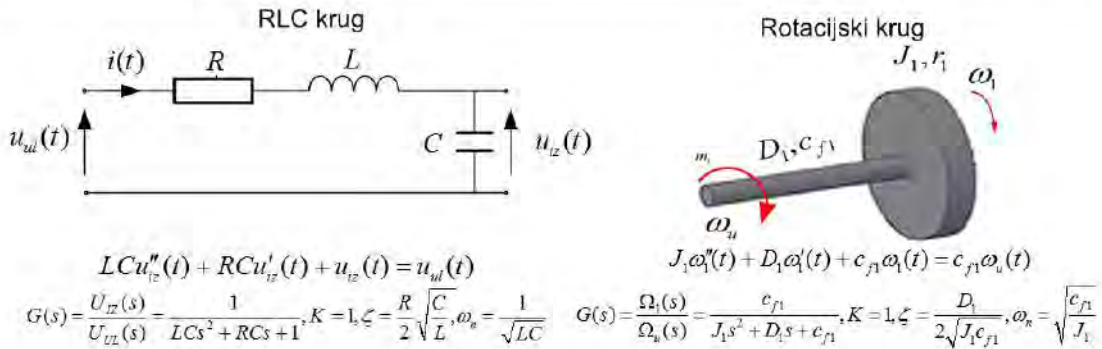
Polovi sustava su nultočke nazivnika. Položaj polova u s-ravnini definira odziv sustava. Pokušajmo sada na temelju nazivnika prijenosne funkcije (5.18) izračunati polove PT2S člana:

$$\begin{aligned} s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 &\Rightarrow s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ s_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d \end{aligned} \quad (5.19)$$

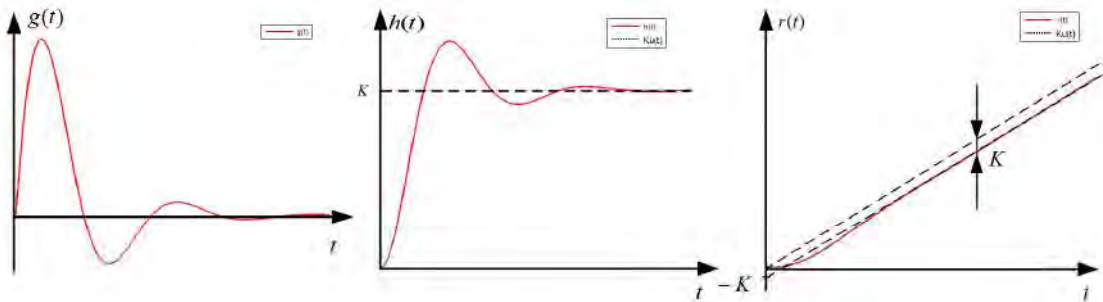
gdje je ω_d frekvencija prigušenih oscilacija. Iz relacije (5.19) možemo vidjeti da će sustav imati prigušene oscilacije za $0 < \zeta < 1$. Za $\zeta = 0$, sustav ima neprigušene oscilacije. Ako je $\zeta \geq 1$, prijenosna funkcija (5.18) PT2S člana prelazi u PT2 član s vremenskim konstantama:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \\ s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 &\Rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) = 0 &\Rightarrow T_1 = -\frac{1}{s_1}, T_2 = -\frac{1}{s_2} \\ T_1 &= \frac{1}{\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}, T_2 = \frac{1}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

³U nekoj literaturi pojam poznat kao frekvencija neprigušenih oscilacija



Slika 5.11: Praktični primjeri PT2S članova



Slika 5.12: Težinska funkcija, prijelazna funkcija i odziv na rampu PT2S člana

Na slici 5.11 prikazana su dva već poznata primjera PT2S člana. Oba sustava, i RLC krug i rotacijski sustav, ovisno o koeficijentima prijenosne funkcije, mogu biti i PT2 i PT2S član. Ako je faktor prigušenja unutar vrijednosti $0 < \zeta < 1$ (faktor prigušenja ovisi o koeficijentima sustava sa slike 5.11), tada će sustavi sa slike 5.11 biti PT2S članovi.

Težinska funkcija PT2S člana $g(t)$ prikazana je relacijom (5.21) (slika 5.12):

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} = \frac{K\omega_n^2 \frac{\omega_d}{\omega_d}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$g(t) = K \frac{\omega_n^2}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t, \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Prijelazna funkcija PT2S člana $h(t)$ prikazana je relacijom (5.22) (slika 5.12):

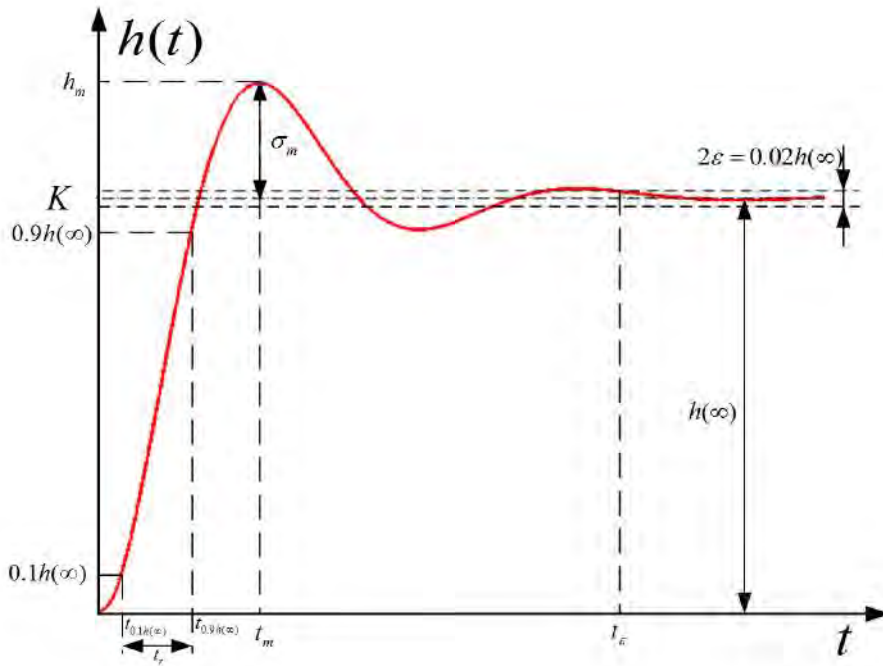
$$\begin{aligned}
H(s) &= G(s) \frac{1}{s} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} = \frac{K\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \frac{1}{s} \\
H(s) &= \frac{K}{s} - \frac{K(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{K\zeta\omega_n \frac{\omega_d}{\omega_n}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \\
&\vdots \\
h(t) &= K \left(1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right), \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Odziv na jediničnu rampu PT2S člana $r(t)$ prikazan je relacijom (5.23) (slika 5.12):

$$\begin{aligned}
R(s) &= G(s) \frac{1}{s^2} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s^2} = \frac{K\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \frac{1}{s^2} \\
R(s) &= \frac{K}{s^2} - \frac{\frac{K2\zeta}{\omega_n}}{s} + \frac{\frac{K2\zeta}{\omega_n}(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{\frac{K2\zeta}{\omega_n} \left(\frac{2\zeta^2 - 1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \\
&\vdots \\
r(t) &= K \left(t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{2\zeta}{\omega_n} e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t - \frac{2\zeta^2 - 1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \right), \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Za PT2S definiraju se pokazatelji kvalitete koji su prikazani na slici 5.13. Navedimo sada pokazatelje kvalitete PT2S člana:

- σ_m nadvišenje prijelazne funkcije
- t_m vrijeme prvog maksimuma, [s]
- t_r vrijeme porasta, [s]
- t_ϵ vrijeme ustaljivanja, [s].



Slika 5.13: Pokazatelji kvalitete

Maksimum prijelazne funkcije je h_m , a ustaljena vrijednost prijelazne funkcije (stacionarna vrijednost) $h(\infty)$. Nadvišenje prijelazne funkcije definira se kao:

$$\sigma_m [\%] = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} 100\%. \quad (5.24)$$

Maksimum prijelazne funkcije dobije se izjednačavanjem prve derivacije prijelazne funkcije s nulom. S obzirom da je prva derivacija prijelazne funkcije težinska funkcija, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} h'(t) = 0 &\Rightarrow g(t) = K \frac{\omega_n^2}{\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t = 0 \Rightarrow \\ \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t &= k\pi \Rightarrow t_m(k) = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Prijelazna funkcija PT2S člana je prigušeno oscilatorna. Izjednačavanjem prve derivacije prijelazne funkcije s nulom dobit ćemo vrijeme svih ekstrema ($t_m(k)$) prijelazne funkcije. S obzirom da nas zanima samo prvi maksimum (globalni maksimum), vrijeme prvog maksimuma bit će za $k = 1$. Sada se može izračunati i maksimum funkcije, a potom

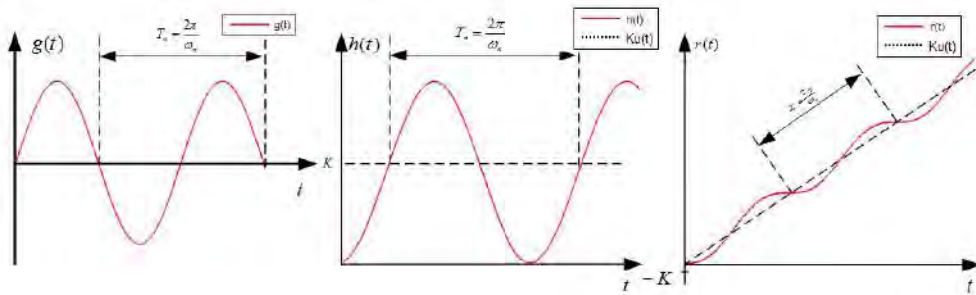
nadvišenje:

$$\begin{aligned}
 t_m(k) &= \left. \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \right|_{k=1} \Rightarrow t_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \\
 h_m &= h(t_m) = K e^{-\zeta \omega_n t_m} = K \left(1 + e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right) \\
 \sigma_m [\%] &= \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} 100\% = \frac{K \left(1 + e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right) - K}{K} 100\% = e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} 100\%.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Vrijeme porasta t_r je vrijeme koje je potrebno da prijelazna funkcija od 10% svoje konačne vrijednosti dođe do 90% svoje konačne vrijednosti (konačna vrijednost je $h(\infty)$). Vrijeme ustaljivanja t_ϵ je vrijeme kod kojeg prijelazna funkcija uđe u 1% odstupanja od konačne vrijednosti prijelazne funkcije $h(\infty)$. Ova dva vremena često se određuju grafički. Postoje i približne relacije za vrijeme porasta i vrijeme ustaljivanja [10]:

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}, t_\epsilon \approx \frac{4.6}{\zeta \omega_n}. \tag{5.27}$$

U slučaju kada je $\zeta = 0$, sustav nema prigušenja, odziv je čisti oscilatoran (odziv s neprigušenim oscilacijama).



Slika 5.14: Težinska funkcija, prijelazna funkcija i odziv na rampu PT2S člana s neprigušenim oscilacijama

Težinska funkcija PT2S člana bez prigušenja $g(t)$ za $\zeta = 0$ prikazana je relacijom (5.28):

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{K \omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \\
 \bullet \\
 \circ \\
 g(t) &= K \omega_n \sin \omega_n t.
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Prijelazna funkcija PT2S člana bez prigušenja $h(t)$ za $\zeta = 0$ prikazana je relacijom (5.29):

$$H(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \frac{1}{s} = \frac{K}{s} - \frac{Ks}{s^2 + \omega_n^2} \quad (5.29)$$



$$h(t) = K(1 - \cos \omega_n t).$$

Odziv na jediničnu rampu PT2S člana bez prigušenja $r(t)$ za $\zeta = 0$ prikazan je relacijom (5.30):

$$R(s) = G(s) \frac{1}{s^2} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \frac{1}{s^2} = \frac{K}{s^2} - \frac{\frac{K}{\omega_n}\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \quad (5.30)$$



$$r(t) = K\left(t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t\right).$$

Na slici 5.14 prikazan je period neprigušenih oscilacija T_n .

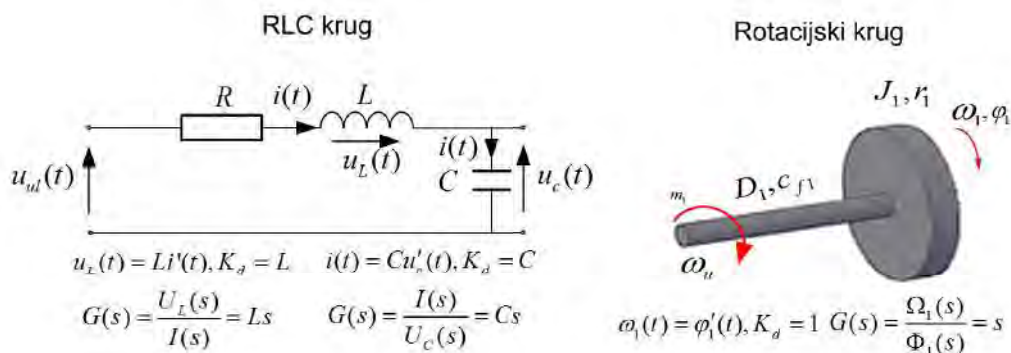
5.6 Derivacijski član (D član)

Članovi kod kojih je izlazna veličina proporcionalna ulaznoj veličini nazivamo derivacijskim članovima (u daljnjem tekstu D članovi). Diferencijalna jednačina D člana je:

$$y(t) = K_d \frac{du(t)}{dt} = K_d u'(t). \quad (5.31)$$

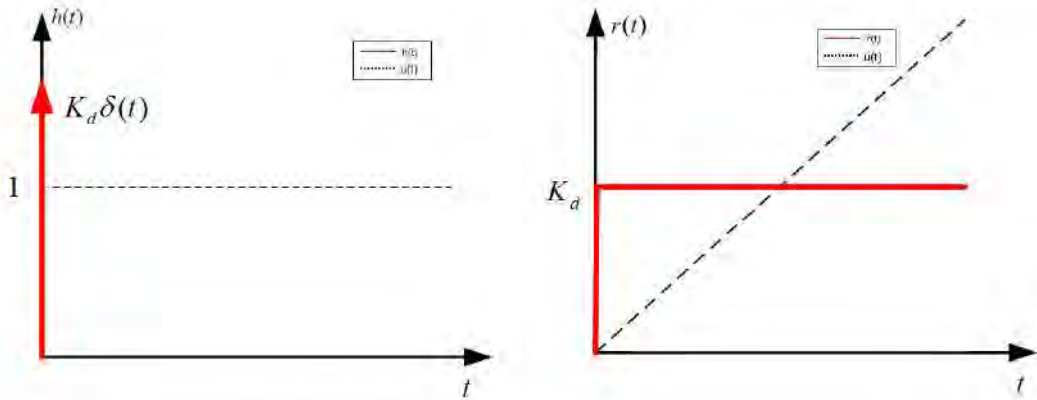
Primjenom Laplaceove transformacije na izraz (5.31) dobit ćemo prijenosnu funkciju D člana:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K_d s. \quad (5.32)$$



Slika 5.15: Praktični primjeri D članova

Na slici 5.15 prikazani su poznati primjeri D članova. Poznato je da je struja kroz kondenzator proporcionalna derivaciji napona na kondenzatoru te da je napon na zavojnici proporcionalan derivaciji struje kroz zavojnicu. U mehanici, brzina je derivacija puta, odnosno u slučaju rotacijskog sustava, kutna brzina je derivacija kutnog pomaka.



Slika 5.16: Prijelazna funkcija i odziv na rampu D člana

Prijelazna funkcija D člana $h(t)$ prikazana je relacijom (5.33), (slika 5.16):

$$H(s) = G(s)U(s) = K_d s \frac{1}{s} = K_d$$

$$\downarrow$$

$$h(t) = K_d \delta(t).$$
(5.33)

Odziv na jediničnu rampu D člana $r(t)$ prikazana je relacijom (5.35) (slika 5.16):

$$R(s) = G(s)U(s) = K_d s \frac{1}{s^2} = \frac{K_d}{s}$$

$$\downarrow$$

$$r(t) = K_d \mu(t).$$
(5.34)

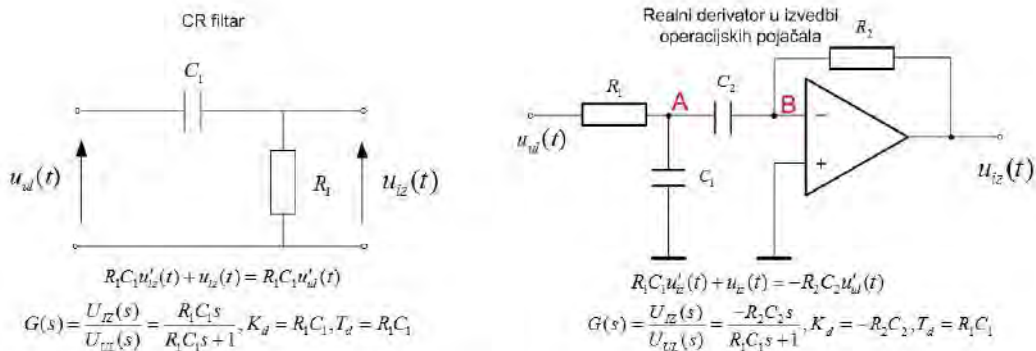
5.6.1 Realni derivacijski član (DT1 član)

Ako je red brojnika prijenosne funkcije sustava $G(s)$ veći od reda nazivnika, tada je sustav nekauzalan. Svi su tehnički sustavi kauzalni. Ako želimo da D član bude kauzalan, potrebno mu je dodati parazitnu vremensku konstantu (mala vremenska konstanta). To je ekvivalentno kaskadi (umnošku) prijenosne funkcije D člana i PT1 člana s jediničnim pojačanjem. Na taj način dobili smo realni derivacijski član (u daljnjem tekstu DT1 član) Prijenosna funkcija DT1 člana je stoga:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_d}{T_d s + 1} s.$$
(5.35)

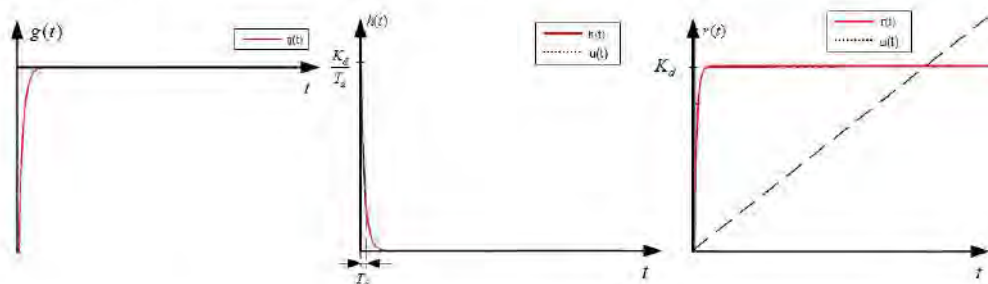
Inverznom Laplaceovom transformacijom moguće je dobiti diferencijalnu jednadžbu DT1 člana:

$$T_d y'(t) + y(t) = K_d u'(t), \quad (5.36)$$



Slika 5.17: Praktični primjeri realnih derivatora (DT1 članovi)

Na slici 5.17 prikazani su praktični primjeri DT1 člana. Prvi je primjer CR filtar. S obzirom da napon na kondenzatoru eksponencijalno raste, napon na otporniku eksponencijalno pada što se poklapa sa prijelaznom funkcijom $h(t)$ na slici 5.18. Drugi je primjer realizacija realnog derivatora s operacijskim pojačalom. Kod CR filtra nije moguće nezavisno mijenjati pojačanje K_d . Kod izvedbe realnog derivatora s operacijskim pojačalom to je izvedivo.



Slika 5.18: Težinska funkcija, prijelazna funkcija i odziv na rampu DT1 člana

Težinska funkcija DT1 člana prikazana je relacijom 5.37 (slika 5.18):

$$G(s) = \frac{K_d s}{T_d s + 1} = \frac{K_d}{T_d} - \frac{\frac{K_d}{T_d^2}}{s + \frac{1}{T_d}} \quad (5.37)$$

$$g(t) = \frac{K_d}{T_d} \left(\delta(t) - \frac{1}{T_d} e^{-\frac{t}{T_d}} \right).$$

Prijelazna funkcija DT1 člana prikazana je relacijom 5.38 (slika 5.18):

$$\begin{aligned}
 H(s) &= G(s) \frac{1}{s} = \frac{K_d s}{T_d s + 1} \frac{1}{s} = \frac{K_d}{T_d s + 1} \\
 \Downarrow \\
 h(t) &= \frac{K_d}{T_d} e^{-\frac{t}{T_d}}.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Odziv DT1 člana na jediničnu rampu prikazan je relacijom 5.39, (slika 5.18):

$$\begin{aligned}
 R(s) &= G(s) \frac{1}{s^2} = \frac{K_d s}{T_d s + 1} \frac{1}{s^2} = \frac{K_d}{T_d s + 1} \frac{1}{s} = \frac{K_d}{s} - \frac{K_d T_d}{T_d s + 1} \\
 \Downarrow \\
 r(t) &= K_d (1 - e^{-\frac{t}{T_d}}).
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

5.7 Integralni član

Članovi kod kojih je izlazna veličina proporcionalna integralu ulazne veličine nazivaju se integralnim članovima (u daljnjem tekstu I članovi). Diferencijalna jednadžba I člana je:

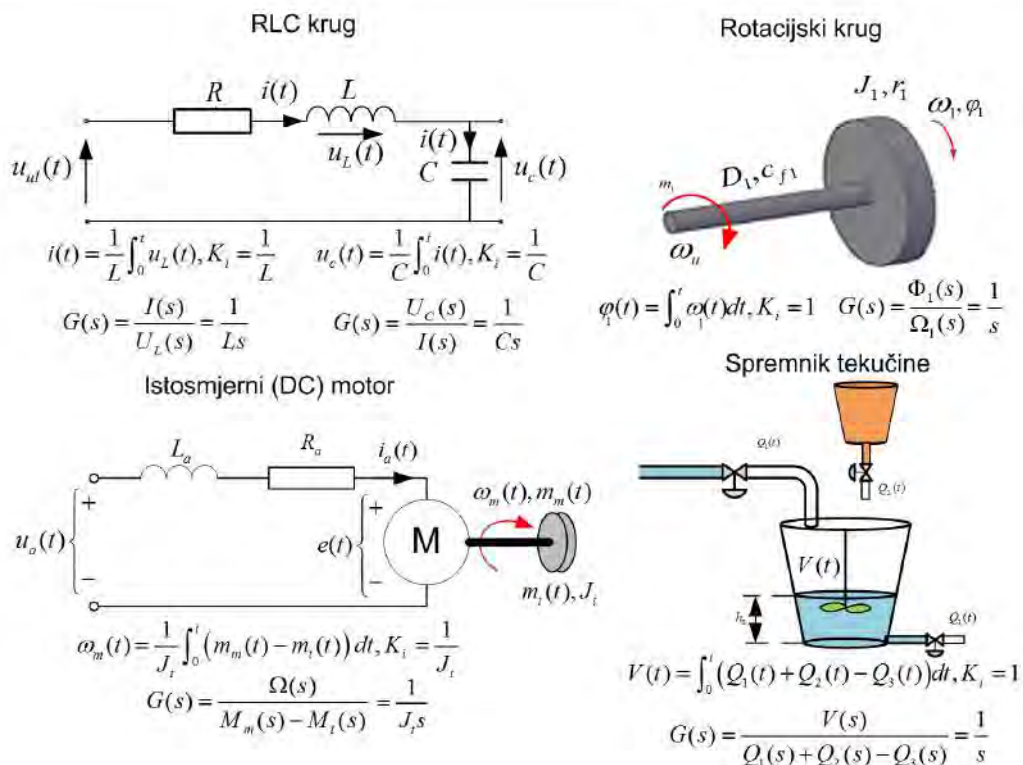
$$y(t) = K_i \int_0^t u(t) dt. \tag{5.40}$$

Primjenom Laplaceove transformacije na izraz (5.41) dobit ćemo prijenosnu funkciju I člana:

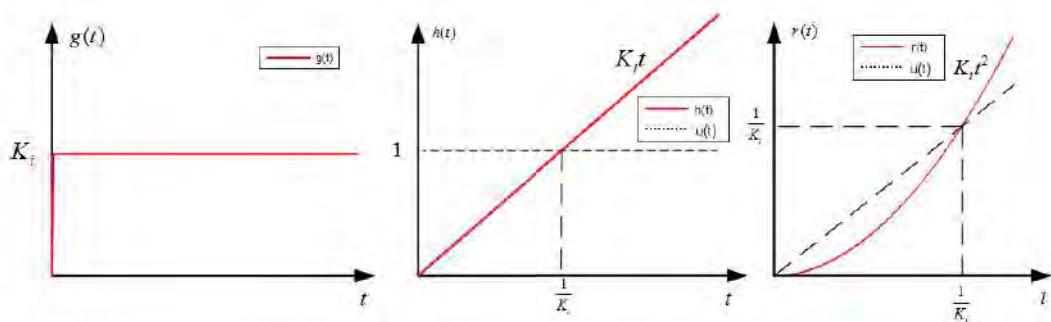
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_i}{s}. \tag{5.41}$$

Na slici 5.19 prikazani su praktični primjeri I članova. Struja zavojnice proporcionalna je integralu napona na zavojnici. Napon na kondenzatoru proporcionalan je integralu struje kroz kondenzator. U mehanici, put je integral brzine, a u slučaju rotacijskog sustava, kutni pomak integral je brzine vrtnje. Kod istosmjernog motora brzina vrtnje proporcionalna je integralu dinamičkog momenta⁴. Volumen tekućine u spremniku integral je razlike svih ulaznih volumnih protoka i svih izlaznih volumnih protoka.

⁴Dinamički moment razlika je momenta motora $m_m(t)$ i momenta tereta $m_t(t)$



Slika 5.19: Praktični primjeri I članova



Slika 5.20: Težinska funkcija, prijelazna funkcija i odziv na rampu I člana

Težinska funkcija I člana prikazana je relacijom 5.42 (slika 5.20):

$$G(s) = \frac{K_i}{s}$$

$$\bullet$$

$$\circ$$

$$g(t) = K_i \mu(t).$$
(5.42)

Prijelazna funkcija I člana prikazana je relacijom 5.43 (slika 5.20):

$$\begin{aligned}
 H(s) &= G(s) \frac{1}{s} = \frac{K_i}{s} \frac{1}{s} = \frac{K_i}{s^2} \\
 \bullet \\
 \circ \\
 h(t) &= K_i t.
 \end{aligned}
 \tag{5.43}$$

Odziv I člana na jediničnu rampu prikazan je relacijom 5.44 (slika 5.20):

$$\begin{aligned}
 R(s) &= G(s) \frac{1}{s^2} = \frac{K_i}{s} \frac{1}{s^2} = \frac{K_i}{s^3} \\
 \bullet \\
 \circ \\
 r(t) &= K_i t^2.
 \end{aligned}
 \tag{5.44}$$

5.8 Član s transportnim kašnjenjem

Do sada su se svi dinamički članovi mogli opisati diferencijalnim jednadžbama. Često se u industrijskim postrojenjima pojavljuju tzv. članovi s transportnim kašnjenjem⁵ koji se ne mogu opisati diferencijalnom jednadžbom. Ovaj član naziva se član s transportnim kašnjenjem iz razloga jer se najčešće pojavljuje kod transportnih sustava. Kašnjenje sustava opisuje se sljedećom jednadžbom:

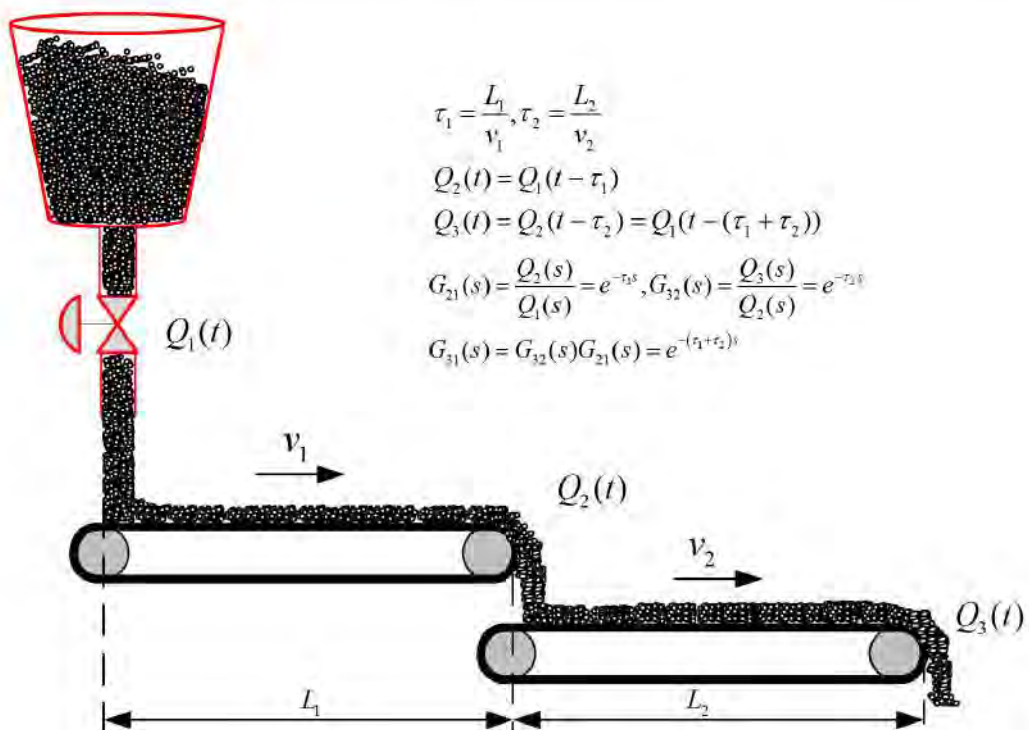
$$y(t) = u(t - \tau) \tag{5.45}$$

gdje je τ transportno kašnjenje ili mrtvo vrijeme. Primjenom teorema o pomaku originala na izraz (5.45), dobit ćemo prijenosnu funkciju člana s transportnim kašnjenjem:

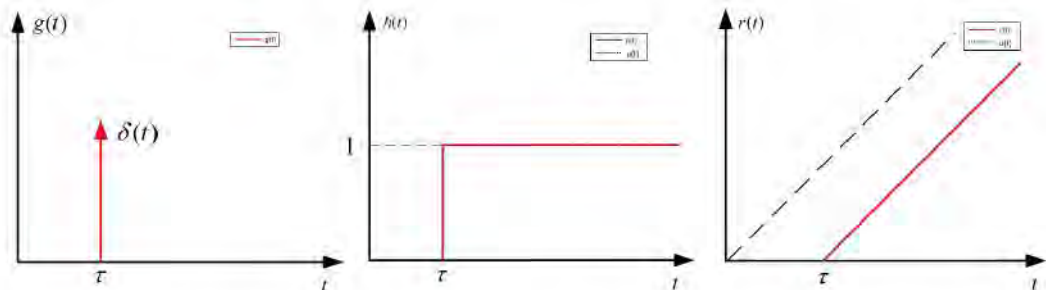
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-\tau s}. \tag{5.46}$$

Na slici 5.21 prikazan je transportni sustav krutog materijala. Zbog opterećenja, sustav je raspodijeljen na dvije pokretne trake. Prva traka, duljine L_1 , giba se konstantnom linearnom brzinom v_1 . Druga traka, duljine L_2 , giba se konstantnom linearnom brzinom v_2 . Zbog duljina pojedinih traka, kruti materijal kasni do prve trake za vrijeme od $\tau_1 = L_1/v_1$. Vrijeme koje je potrebno da kruti materijal dođe od kraja prve do kraja druge trake je $\tau_2 = L_2/v_2$. Ukupno kašnjenje krutog materijala od ulaza Q_1 do izlaza Q_3 zbroj je pojedinih kašnjenja $\tau_1 + \tau_2$.

⁵U nekoj literaturi se naziva član s mrtvim vremenom



Slika 5.21: Praktični primjer člana s transportnim kašnjenjem



Slika 5.22: Težinska funkcija, prijelazna funkcija i odziv na rampu člana s transportnim kašnjenjem

Težinska funkcija člana s transportnim kašnjenjem prikazana je relacijom 5.47 (slika 5.22):

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

$$\downarrow$$

$$g(t) = \delta(t - \tau).$$
(5.47)

Prijelazna funkcija člana s transportnim kašnjenjem prikazana je relacijom 5.48 (slika

5.22):

$$\begin{aligned}
 H(s) &= G(s) \frac{1}{s} = e^{-\tau s} \frac{1}{s} \\
 \Downarrow \\
 h(t) &= \mu(t - \tau).
 \end{aligned}
 \tag{5.48}$$

Odziv člana s transportnim kašnjenjem na jediničnu rampu prikazan je relacijom 5.49, (slika 5.22):

$$\begin{aligned}
 R(s) &= G(s) \frac{1}{s^2} = e^{-\tau s} \frac{1}{s^2} \\
 \Downarrow \\
 r(t) &= (t - \tau) \mu(t - \tau).
 \end{aligned}
 \tag{5.49}$$

Poglavlje 6

Frekvencijski odziv osnovnih dinamičkih članova

Ako na ulaz linearnih vremenski nepromjenjivih sustava dovedemo neprigušenu oscilatornu (harmoničku) komponentu¹ tada će nakon prijelaznih pojava sustav poprimiti isto neprigušeno oscilatorno ponašanje s frekvencijom ulaznog signala, ali s pomakom u fazi. Na ulaz sustava dovedimo pobudu oblika:

$$u(t) = A \sin \omega t. \quad (6.1)$$

Primjenom Laplaceove transformacije na pobudu (6.1) dobijemo:

$$U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (6.2)$$

Neka je linearni sustav opisan prijenosnom funkcijom $G(s)$ i neka za sve polove vrijedi $\operatorname{Re}\{p_i\} < 0$ [1]. Odziv sustava može se dobiti kao:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (6.3)$$

Ako želimo napraviti inverznu Laplaceovu transformaciju izraza (6.3) potrebno je na $Y(s)$ primijeniti Heavisideov razvoj²:

$$Y(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n} + \frac{K_{s1}}{s - j\omega} + \frac{K_{s2}}{s + j\omega}. \quad (6.4)$$

Pokušajmo sada pronaći koeficijente K_{s1} i K_{s2} koristeći formulu:

$$\begin{aligned} K_{s1} &= \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) Y(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) \frac{G(s)A\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \\ K_{s2} &= \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega) Y(s) = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega) \frac{G(s)A\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

¹Sinusna ili kosinusna pobuda s frekvencijom ω

²Pogledati potpoglavlje *Matematički modeli kontinuiranih sustava - Opis sustava prijenosnom funkcijom u Laplaceovoj domeni*

Sređivanjem izraza (6.5) dobije se:

$$\begin{aligned} K_{s1} &= \frac{G(j\omega)A\omega}{(j\omega + j\omega)} = \frac{G(j\omega)A}{2j} \\ K_{s2} &= \frac{G(-j\omega)A\omega}{(-j\omega - j\omega)} = \frac{G(-j\omega)A}{-2j}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

S obzirom da se svaki kompleksni broj može zapisati kao umnožak njegovog modula i argumenta:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = |G(j\omega)| e^{j\arg(G(j\omega))} \\ G(j\omega) &= |G(j\omega)| e^{j\arg(G(j\omega))} = \sqrt{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}^2} e^{j\arg\left(\frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}}\right)}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

slijedi:

$$\begin{aligned} K_{s1} &= \frac{|G(j\omega)| e^{j\arg(G(j\omega))} A}{2j} \\ K_{s2} &= \frac{|G(-j\omega)| e^{j\arg(G(-j\omega))} A}{-2j}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Brojevi $G(j\omega)$ i $G(-j\omega)$ su konjugirano kompleksni brojevi za koje vrijedi da je $|G(-j\omega)| = |G(j\omega)|$ i $\arg(G(-j\omega)) = -\arg(G(j\omega))$ [11]. Sada se izraz (6.8) može napisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} K_{s1} &= \frac{|G(j\omega)| e^{j\arg(G(j\omega))} A}{2j} \\ K_{s2} &= \frac{|G(j\omega)| e^{-j\arg(G(j\omega))} A}{-2j}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije na izraz (6.3) dobije se:

$$y(t) = \underbrace{K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t}}_{\text{homogeno rješenje}} + \underbrace{K_{s1} e^{j\omega t} + K_{s2} e^{-j\omega t}}_{\text{partikularno rješenje}}. \quad (6.10)$$

Ako za polove vrijedi da je $\operatorname{Re}\{p_i\} < 0$, tada homogeni dio rješenja iščezava s vremenom, a ostaje samo partikularno rješenje od $y(t)$. Nakon što homogeno rješenje iščezne ostaje samo partikularno rješenje:

$$y(t) = \underbrace{K_{s1} e^{j\omega t} + K_{s2} e^{-j\omega t}}_{\text{partikularno rješenje}}. \quad (6.11)$$

Uvrstimo sada izračunate konstante K_{s1} i K_{s2} u izraz (6.11):

$$\begin{aligned} y(t) &= K_{s1} e^{j\omega t} + K_{s2} e^{-j\omega t} = \frac{|G(j\omega)| e^{j\arg(G(j\omega))} A}{2j} e^{j\omega t} + \frac{|G(j\omega)| e^{-j\arg(G(j\omega))} A}{-2j} e^{-j\omega t} \\ y(t) &= |G(j\omega)| A \frac{e^{j\arg(G(j\omega))} e^{j\omega t} - e^{-j\arg(G(j\omega))} e^{-j\omega t}}{2j} \\ y(t) &= |G(j\omega)| A \frac{e^{j(\omega t + \arg(G(j\omega)))} - e^{-j(\omega t + \arg(G(j\omega)))}}{2j}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

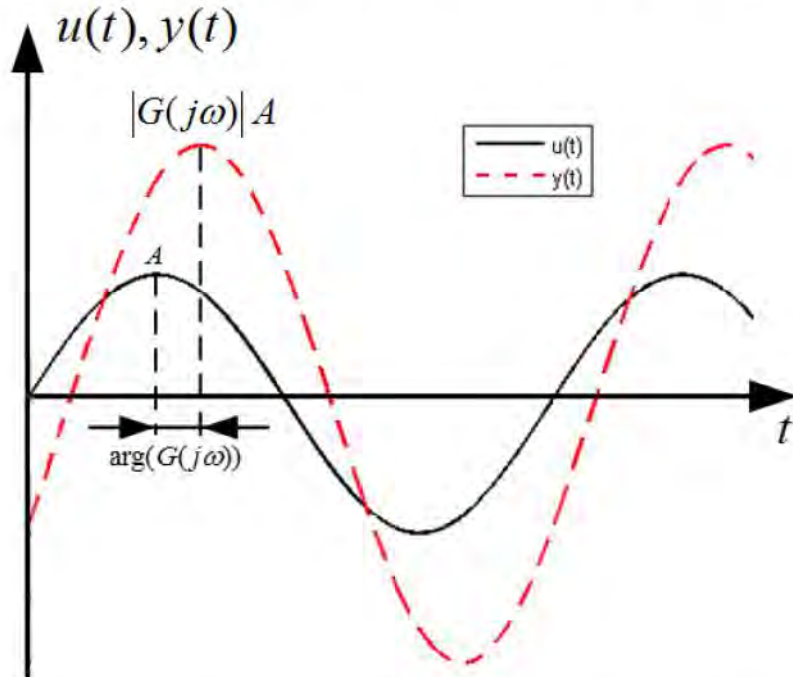
Primjenom Eulerove formule³ za sinus funkciju:

$$\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \quad (6.13)$$

na izraz (6.12) dobit ćemo konačno rješenje sustava nakon prijelaznih pojava (nakon što homogeno rješenje iščezne) [12]:

$$y(t) = |G(j\omega)| A \sin(\omega t + \arg(G(j\omega))). \quad (6.14)$$

Amplituda izlaznog signala je $|G(j\omega)| A$, a fazni pomak izlaznog signala naspram ulaznog signala je $\arg(G(j\omega))$. Može se zaključiti da je ulazni signal, doveden na sustav $G(s)$, na frekvenciji ω pojačan za $|G(j\omega)|$ i fazno pomaknut za $\arg(G(j\omega))$ (slika 6.1).



Slika 6.1: Izlazni signal sustava $G(s)$ uz neprigušenu oscilatornu pobudu

Dokazali smo tvrdnju s početka poglavlja. Ako bismo izračunali pojačanja i fazne pomake izlaznog signala u ovisnosti o ulaznom signalu za sve frekvencije $0 \leq \omega < \infty$, dobili bismo amplitudno frekvencijsku i fazno frekvencijsku karakteristiku. Pojedinačno crtanje amplitudne i fazno frekvencijske karakteristike⁴ sustava nazivamo Bodeovim dijagramima. Iz dosadašnjih razmatranja možemo zaključiti da se pojačanje i fazni pomak ulaznog neprigušeno oscilatornog signala na izlazu sustava može izračunati tako da se uvede supstitucija $s = j\omega$.

³ $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$

⁴O amplitudno frekvencijskoj i fazno frekvencijskoj karakteristici nešto više u nastavku poglavlja.

Opišimo sada transformaciju koja vremenski signal transformira u frekvencijsku domenu. Transformacija koja povezuje vremensku domenu i frekvencijsku domenu naziva se Fourierova transformacija. Ova transformacija nalazi veliku primjenu u obradi signala, teoriji vjerojatnosti, analizi sustava automatskog upravljanja i drugim područjima [5]. Primjenom Fourierove transformacije na sustav automatskog upravljanja (prijenosnu funkciju) dobiju se pojačanja i pomak u fazi sustava na pojedinim frekvencijama. Stoga ćemo na temelju Fourierove transformacije moći promatrati amplitudno frekvencijsku i fazno frekvencijsku karakteristiku.

Definicija Fourierove transformacije dana je sljedećim izrazom [13]:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (6.15)$$

Za pobudne signale $u(t)$ koji se koriste u automatskom upravljanju vrijedi da je $u(t) = 0$ za $t < 0$. Uz pretpostavku da su početna stanja sustava jednaka nuli (mirni sustav), za odziv sustava $y(t)$ također vrijedi da je $y(t) = 0$ za $t < 0$. Primjenom ovog zaključka na izraz (6.15) možemo pisati:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^0 y(t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \\ Y(\omega) &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \\ Y(\omega) &= \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt. \end{aligned} \quad (6.16)$$

U izrazu (6.16) integral za negativna vremena jednak je nuli. Ako u izrazu (6.16) napravimo supstituciju $s = j\omega$ dolazimo do definicije Laplaceove transformacije signala $y(t)$:

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt \Big|_{s=j\omega} \Rightarrow Y(\omega) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (6.17)$$

Ako izraz (6.3) želimo promatrati u frekvencijskoj domeni, potrebno je samo napraviti supstituciju $s = j\omega$.

Pokušajmo sada na temelju dosadašnjih saznanja izračunati izlaz $y(t)$ sustava $G(s)$ nakon prijelaznih pojava. Zadan je ulazni signal $u(t)$ i prijenosna funkcija sustava $G(s)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= 5 \sin 3t \\ G(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Uvođenjem supstitucije $s = j\omega$ u prijenosnu funkciju $G(s)$ dobit ćemo:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \Big|_{s=j\omega} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} \\
 G(j\omega) &= |G(j\omega)| e^{j \arg(G(j\omega))} = \frac{|P(j\omega)| e^{j \arg(P(j\omega))}}{|Q(j\omega)| e^{j \arg(Q(j\omega))}} = \frac{1}{\sqrt{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}} e^{j \arctan(\frac{3\omega}{2 - \omega^2})} \\
 G(j\omega) &= \frac{1}{\sqrt{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}} e^{-j \arctan(\frac{3\omega}{2 - \omega^2})} \\
 |G(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}}, \arg(G(j\omega)) = e^{-j \arctan(\frac{3\omega}{2 - \omega^2})}.
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Kod računanja \arctan funkcije vrlo je bitno u kojem se kvadrantu nalazi točka za koju računamo arcus tangens. Brojnik \arctan funkcije predstavlja imaginarnu komponentu točke u kompleksnoj ravnini, a nazivnik predstavlja realnu komponentu točke u kompleksnoj ravnini.

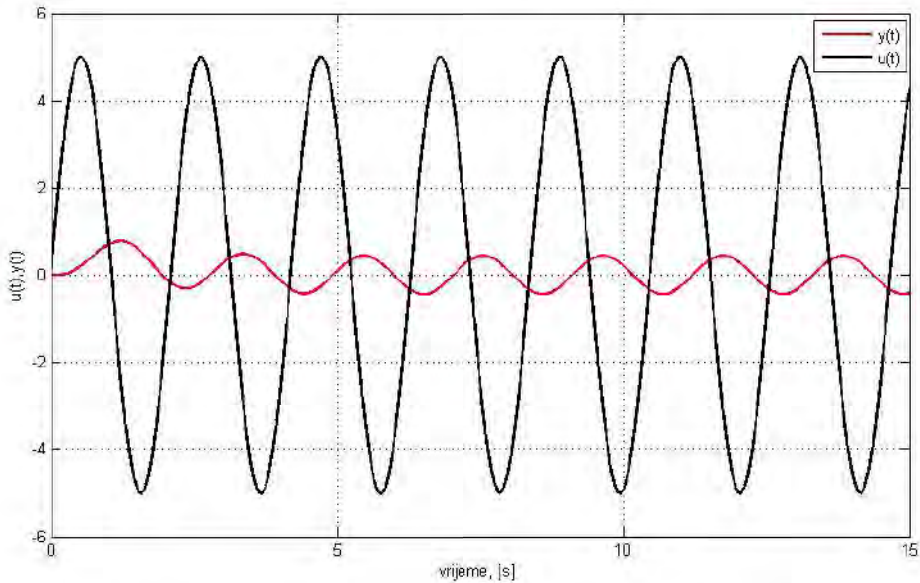
S obzirom da kalkulatori vraćaju vrijednosti \arctan funkcije samo za kuteve iz I. i IV. kvadranta, potrebno je za točke iz II. i III. kvadranta dodati još π na izračunatu vrijednost kuta kalkulatora. Iz izraza (6.18) slijedi da je $\omega = 3 \text{ rad s}^{-1}$ te je vrijednost frekvencije potrebno samo uvrstiti u (6.19):

$$\begin{aligned}
 G(j3) &= \frac{1}{\sqrt{(2 - 3^2)^2 + 9 \cdot 3^2}} e^{-j \arctan(\frac{3 \cdot 3}{2 - 3^2})} = \frac{\sqrt{130}}{130} e^{-j2.2318} \\
 |G(j3)| &= \frac{\sqrt{130}}{130}, \arg(G(j3)) = -2.2318.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Korištenjem izraza (6.14), dobivenog pojačanja i faznog pomaka u (6.20) dobije se izlazni signal:

$$y(t) = |G(j\omega)| A \sin(\omega t + \arg(G(j\omega)))|_{A=5, \omega=3} = \frac{5\sqrt{130}}{130} \sin(3t - 2.2318). \tag{6.21}$$

Odziv sustava $G(s)$ na pobudu $u(t)$ dan izrazom (6.18) prikazan je na slici 6.2



Slika 6.2: Odziv $y(t)$ sustava $G(s)$ na pobudu $u(t)$, (izraz (6.18))

Osnovna je prednost frekvencijske analize sustava, mogućnost grafičkog prikaza koji se može na jednostavan način primijeniti u analizi i sintezi automatskog sustava upravljanja. Grafički prikaz temelji se na prikazu kompleksne prijenosne funkcije $G(j\omega)$ u ovisnosti o frekvenciji ω . U praksi se pojavljuju sljedeći grafički postupci [2]:

- Nyquistov dijagram
- Bodeov dijagram
- Nicholsov dijagram

U inženjerskoj praksi danas najčešće se koristi Nyquistov i Bodeov dijagram, stoga ćemo detaljno opisati crtanje ovih dijagrama.

6.1 Nyquistov dijagram

Nyquistov dijagram je prikaz kompleksne prijenosne funkcije $G(j\omega)$ u kompleksnoj (Gaussovoj ravlini ⁵). Kompleksnu prijenosnu funkciju $G(j\omega)$ možemo rastaviti na realni i imaginarni dio:

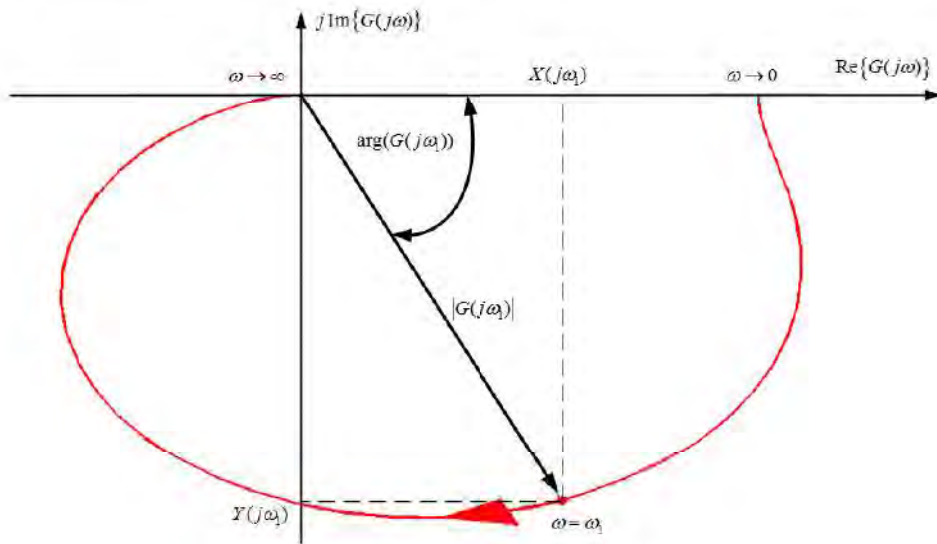
$$G(j\omega) = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = X(j\omega) + jY(j\omega) \quad (6.22)$$

ili u polarnom obliku:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg(G(j\omega))}, \quad (6.23)$$

⁵Ravnina u kojoj se prezentiraju kompleksni brojevi: realni dio na osi apscisa, imaginarni dio na osi ordinati

Nyquistov dijagram moguće je sada crtati za sve frekvencije $0 \leq \omega < \infty$. Uvrštavajući frekvencije ω u izraze (6.22) i (6.23) crtaju se kompleksne točke u Gaussovoj ravnini. Spajajući pojedine točke dobijemo Nyquistov dijagram. Često Nyquistov dijagram završava u ishodištu ($\omega \rightarrow \infty$) Gaussove ravnine pa se prema (6.23) može odrediti pod kojim kutem Nyquistova krivulja ulazi u ishodište Gaussove ravnine. Također se može odrediti i pod kojim kutem Nyquistova krivulja izlazi iz početne točke gdje je $\omega = 0$. Primjer Nyquistovog dijagrama prikazan je na slici 6.3.



Slika 6.3: Nyquistov dijagram

Nedostatak Nyquistovog dijagrama je u tome što je potrebno znati vrijednosti kompleksne prijenosne funkcije $G(j\omega)$ na svim frekvencijama ω . Također, kod visokih frekvencija krivulja zauzima malo područje što postaje nepregledno. Prednost Nyquistovog dijagrama je u tome što brzo možemo napraviti osnovnu analizu ponašanja sustava na svim frekvencijama. Pokušajmo sada nacrtati Nyquistov dijagram za jednostavni sustav $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}. \quad (6.24)$$

Da bismo izradili frekvencijsku analizu, najprije je u prijenosnu funkciju $G(s)$ potrebno uvrstiti supstituciju $s = j\omega$, a zatim proračunati pojedine, realne i imaginarne, dijelove kompleksne prijenosne funkcije $G(j\omega)$:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s(s+1)} \Big|_{j\omega} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{1}{-\omega^2 + j\omega} \\ G(j\omega) &= \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}e^{j\arctan(\frac{1}{\omega})}} = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}e^{-j\arctan(\frac{1}{\omega})}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Racionalizacijom kompleksne prijenosne funkcije $G(j\omega)$ dobije se:

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = X(j\omega) + jY(j\omega) \\
 G(j\omega) &= \frac{1}{-\omega^2 + j\omega} \frac{-\omega^2 - j\omega}{-\omega^2 - j\omega} = \frac{-\omega^2 - j\omega}{\omega^4 + \omega^2} = \frac{-1}{\omega^2 + 1} + j \frac{-1}{\omega^3 + \omega} \\
 X(j\omega) &= \frac{-1}{\omega^2 + 1} \\
 Y(j\omega) &= \frac{-1}{\omega^3 + \omega}.
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Realni dio $X(j\omega)$ kompleksne prijenosne funkcije $G(j\omega)$ uvijek je negativan bez obzira na predznak frekvencije ω , dok je imaginarni dio $Y(j\omega)$ kompleksne prijenosne funkcije $G(j\omega)$ pozitivan za negativne frekvencije ω , a negativan za pozitivne frekvencije ω . S obzirom da analiziramo tehničke sustave, nećemo crtati Nyquistov dijagram za negativne frekvencije. Nyquistov dijagram crtati ćemo samo za pozitivne frekvencije $0 \leq \omega < \infty$, što smo već i naveli. Ako je tako, tada će imaginarni dio $Y(j\omega)$ kompleksne prijenosne funkcije $G(j\omega)$ biti uvijek negativan. Za sada smo zaključili da će Nyquistov dijagram sustava (6.24) egzistirati u III kvadrantu kompleksne ravnine. Pogledajmo što se događa u točkama kada $\omega \rightarrow 0$ i kada $\omega \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow 0} X(j\omega) &= \frac{-1}{\omega^2 + 1} = -1, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} Y(j\omega) = \frac{-1}{\omega^3 + \omega} = -\infty \\
 \lim_{\omega \rightarrow \infty} X(j\omega) &= \frac{-1}{\omega^2 + 1} = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} Y(j\omega) = \frac{-1}{\omega^3 + \omega} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

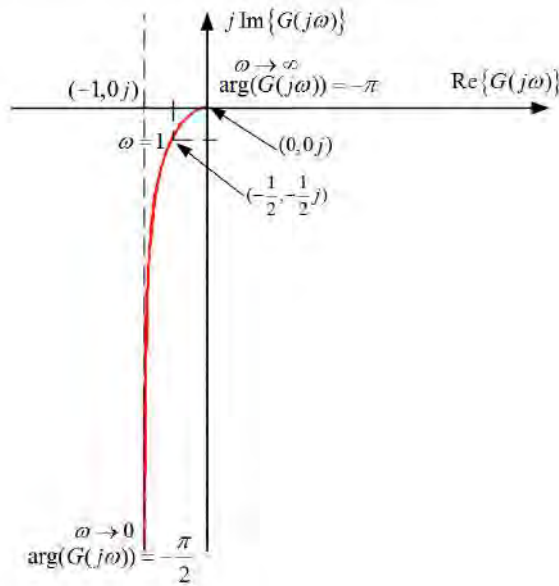
Uzmimo još jednu frekvenciju za koju ćemo odrediti točku u kompleksnoj ravnini (npr. $\omega = 1$):

$$X(j1) = \frac{-1}{1^2 + 1} = -\frac{1}{2}, \quad Y(j1) = \frac{-1}{1^3 + 1} = -\frac{1}{2}. \tag{6.28}$$

Prije crtanja Nyquistovog dijagrama poželjno je da se izračuna vrijednost kuta pod kojim se izlazi iz početne točke ($\omega \rightarrow 0$) i kuta pod kojim se ulazi u krajnju točku ($\omega \rightarrow \infty$). U slučaju sustava definiranog izrazom (6.24) to je lako odrediti i bez matematičkog aparata, ali postoje sustavi kod kojih je Nyquistova krivulja vrlo specifična. Potrebno je odrediti $\arg(G(j\omega))$ za navedene dvije frekvencije:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow 0} \arg(G(j\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(-\arctan\left(\frac{1}{-\omega}\right) \right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \\
 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg(G(j\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(-\arctan\left(\frac{1}{-\omega}\right) \right) = -(\pi) = -\pi.
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Nakon svih proračuna, sada možemo nacrtati Nyquistov dijagram sustava (6.24) (slika 6.4).



Slika 6.4: Nyquistov dijagram sustava (6.24)

6.2 Bodeov dijagram

Bodeovi dijagrami su dijagrami koji posebno prikazuju ovisnost amplitude o frekvenciji, a posebno ovisnost faznog pomaka o frekvenciji sustava. Pojedine ćemo dijagrame zvati amplitudno frekvencijska karakteristika i fazno frekvencijska karakteristika. Ove karakteristike crtaju se u *lin - log*⁶ skali. S obzirom da ćemo amplitudu crtati u decibelima, a modul (apsolutna vrijednost) kompleksne prijenosne funkcije $|G(j\omega)|$ predstavlja pojačanje sustava, koristit ćemo poznati izraz iz elektronike za omjer izlaznog i ulaznog napona:

$$A [dB] = 10 \log \frac{P_i}{P_u} = 10 \log \frac{U_i^2}{U_u^2} = 20 \log \frac{U_i}{U_u}. \quad (6.30)$$

Ako to primijenimo na modul kompleksne prijenosne funkcije $|G(j\omega)|$ dobit ćemo izraz:

$$|G(j\omega)| [dB] = 20 \log |G(j\omega)|. \quad (6.31)$$

Prijenosna funkcija sustava općenito se može napisati kao umnožak pojačanja sustava K , nula u brojniku i polova u nazivniku:

$$G(s) = K \frac{(s - n_1)(s - n_2) \cdots (s - n_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}. \quad (6.32)$$

⁶Amplituda se crta linearno u decibelima (dB), a frekvencija logaritamski u rad/s

Supstitucijom $s = j\omega$ u izrazu (6.32) dobit ćemo:

$$G(j\omega) = K \frac{(j\omega - n_1)(j\omega - n_2) \cdots (j\omega - n_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_n)}. \quad (6.33)$$

Ako je sustav kauzalan, broj nula je općenito manji ili jednak broju polova ($m \leq n$). Neka je broj nula jednak broju polova ($m = n$, najopćenitiji slučaj). Izraz (6.33) tada možemo napisati na sljedeći način:

$$G(j\omega) = K \frac{(j\omega - n_1)}{(j\omega - p_1)} \frac{(j\omega - n_2)}{(j\omega - p_2)} \cdots \frac{(j\omega - n_m)}{(j\omega - p_n)}. \quad (6.34)$$

Izraz (6.34) može se poopćiti i na slučajeve kada je broj nula manji od broja polova ($m < n$). Tada bi kompleksna prijenosna funkcija imala oblik:

$$G(j\omega) = K \frac{(j\omega - n_1)}{(j\omega - p_1)} \frac{(j\omega - n_2)}{(j\omega - p_2)} \cdots \frac{(j\omega - n_m)}{(j\omega - p_m)} \cdots \frac{1}{(j\omega - p_n)}. \quad (6.35)$$

Pojedine faktore izraza (6.34) i (6.35) možemo zapisati kao zasebne kompleksne prijenosne funkcije:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K \cdot G_{n1}(j\omega) \cdots G_{nm}(j\omega)}{G_{p1}(j\omega) G_{p2}(j\omega) \cdots G_{pn}(j\omega)} \\ G_{n1}(j\omega) &= (j\omega - n_1), \dots, G_{nm}(j\omega) = (j\omega - n_m) \\ G_{p1}(j\omega) &= (j\omega - p_1), \dots, G_{pn}(j\omega) = (j\omega - p_n). \end{aligned} \quad (6.36)$$

U izrazu (6.36) $G_{ni}(j\omega)$ su nule sustava ($1 \leq i \leq m$), a $G_{pj}(j\omega)$ su polovi sustava ($1 \leq j \leq n$). Ako primijenimo izraz (6.23) na izraz (6.36) dobije se:

$$G(j\omega) = \frac{|K| e^{j \arg(K)} |G_{n1}(j\omega)| e^{j \arg(G_{n1}(j\omega))} \cdots |G_{nm}(j\omega)| e^{j \arg(G_{nm}(j\omega))}}{|G_{p1}(j\omega)| e^{j \arg(G_{p1}(j\omega))} |G_{p2}(j\omega)| e^{j \arg(G_{p2}(j\omega))} \cdots |G_{pn}(j\omega)| e^{j \arg(G_{pn}(j\omega))}}, \quad (6.37)$$

odnosno:

$$|G(j\omega)| = \frac{|K| |G_{n1}(j\omega)| |G_{n2}(j\omega)| \cdots |G_{nm}(j\omega)|}{|G_{p1}(j\omega)| |G_{p2}(j\omega)| \cdots |G_{pn}(j\omega)|} \quad (6.38)$$

i:

$$\begin{aligned} \arg(G(j\omega)) &= \arg(K) + \arg(G_{n1}(j\omega)) + \arg(G_{n2}(j\omega)) + \dots + \arg(G_{nm}(j\omega)) \\ &\quad - \arg(G_{p1}(j\omega)) - \arg(G_{p2}(j\omega)) - \dots - \arg(G_{pn}(j\omega)). \end{aligned} \quad (6.39)$$

U izrazu (6.39) vidimo da je potrebno tražiti argument konstante pojačanja K . Naime, ako sustav ima negativno pojačanje tada je $\arg(K) = -180^\circ$. Na izraz (6.38) potrebno je djelovati logaritamskom funkcijom:

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left(\frac{|K| |G_{n1}(j\omega)| |G_{n2}(j\omega)| \cdots |G_{nm}(j\omega)|}{|G_{p1}(j\omega)| |G_{p2}(j\omega)| \cdots |G_{pn}(j\omega)|} \right). \quad (6.40)$$

Korištenjem izraza (6.31) i pravila logaritmiranja dobit ćemo:

$$|G(j\omega)| [dB] = 20 \log |K| + 20 \log |G_{n1}(j\omega)| + 20 \log |G_{n2}(j\omega)| + \dots + 20 \log |G_{nm}(j\omega)| + \\ - 20 \log |G_{p1}(j\omega)| - 20 \log |G_{p2}(j\omega)| - \dots - 20 \log |G_{pn}(j\omega)|. \quad (6.41)$$

Izraz (6.41) predstavlja amplitudno frekvencijsku karakteristiku, a izraz (6.39) predstavlja fazno frekvencijsku karakteristiku. Izraze (6.39) i (6.41) prezentirat ćemo na grafu u *lin - log* skali. Tako prezentiran graf predstavlja Bodeov dijagram. Radi jednostavnosti izraz (6.32) zapisat ćemo kao:

$$G(s) = K \frac{\left(\frac{s}{\omega_{Ln1}} + 1\right) \left(\frac{s}{\omega_{Ln2}} + 1\right) \dots \left(\frac{s}{\omega_{Lnm}} + 1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_{Lp1}} + 1\right) \left(\frac{s}{\omega_{Lp2}} + 1\right) \dots \left(\frac{s}{\omega_{Lpn}} + 1\right)}. \quad (6.42)$$

gdje su ω_{Lni} lomne frekvencije nula sustava ($1 \leq i \leq m$), a ω_{Lpj} lomne frekvencije polova sustava ($1 \leq j \leq n$). Pogledajmo zašto je prijenosnu funkciju sustava pogodno napisati u obliku (6.42). Ako pokušamo napraviti amplitudno frekvencijsku karakteristiku samo od $G_{n1}(j\omega)$:

$$G_{n1}(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_{Ln1}} + 1\right) \quad (6.43)$$

u logaritamskom obliku dobit ćemo:

$$20 \log |G_{n1}(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{Ln1}}\right)^2 + 1}. \quad (6.44)$$

Za frekvencije $\omega \ll \omega_{Ln1}$ vrijedi sljedeće:

$$20 \log |G_{n1}(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{Ln1}}\right)^2 + 1} \approx 20 \log \sqrt{1} = 0. \quad (6.45)$$

Za frekvencije $\omega \gg \omega_{Ln1}$ vrijedi sljedeće:

$$20 \log |G_{n1}(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{Ln1}}\right)^2 + 1} \approx 20 \log \frac{\omega}{\omega_{Ln1}}. \quad (6.46)$$

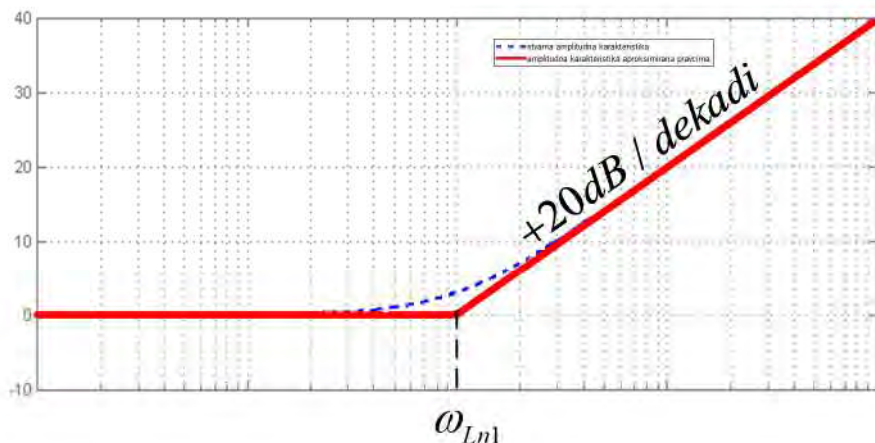
Za frekvencije $\omega = \omega_{Ln1}$ vrijedi sljedeće:

$$20 \log |G_{n1}(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{Ln1}}\right)^2 + 1} = 20 \log \sqrt{2} = 3dB. \quad (6.47)$$

Pri frekvenciji jednakoj lomnoj frekvenciji dolazi do pojačanja od 3 dB. Za frekvencije manje od lomne frekvencije pojačanje je 0 dB, a za frekvencije veće od lomne frekvencije pojačanje raste 20 dB po dekadi⁷. Iz ove analize zaključujemo da ćemo amplitudno

⁷Kada se frekvencija poveća 10 puta, pojačanje se poveća za 20 dB

frekvencijsku karakteristiku aproksimirati pravcima do lomne frekvencije i nakon lomne frekvencije. Razlika između stvarne i aproksimirane amplitudno frekvencijske karakteristike prikazana je na slici 6.5.



Slika 6.5: Amplitudno frekvencijska karakteristika (stvarna i aproksimirana pravcima)

Pokušajmo napraviti aproksimaciju pravcima fazno frekvencijske karakteristike na primjeru $G_{n1}(j\omega)$:

$$\arg(G_{n1}(j\omega)) = \arctan \left(\frac{\text{Im} \{G_{n1}(j\omega)\}}{\text{Re} \{G_{n1}(j\omega)\}} \right). \quad (6.48)$$

Sređivanjem izraza (6.48) dobit ćemo:

$$\arg(G_{n1}(j\omega)) = \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_{Ln1}} \right). \quad (6.49)$$

Za frekvencije $\omega \ll 0.1\omega_{Ln1}$ vrijedi sljedeće:

$$\arg(G_{n1}(j\omega)) = \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_{Ln1}} \right) \approx 0^\circ. \quad (6.50)$$

Za frekvencije $\omega \gg 10\omega_{Ln1}$ vrijedi sljedeće:

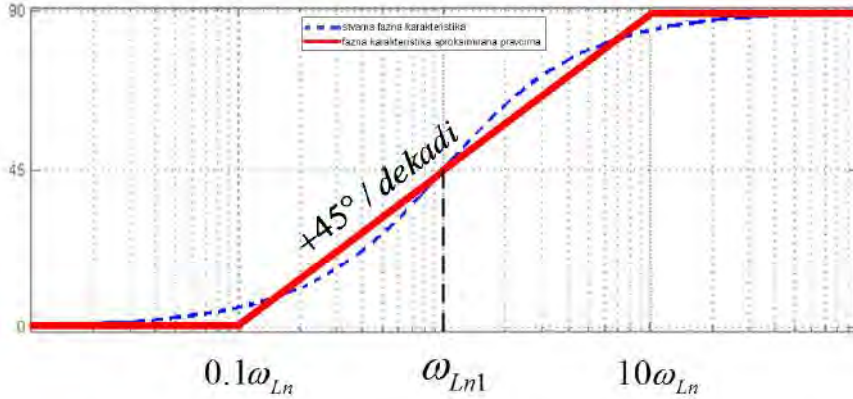
$$\arg(G_{n1}(j\omega)) = \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_{Ln1}} \right) \approx 90^\circ. \quad (6.51)$$

Za frekvencije $\omega = \omega_{Ln1}$ vrijedi sljedeće:

$$\arg(G_{n1}(j\omega)) = \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_{Ln1}} \right) = 45^\circ. \quad (6.52)$$

Za fazu vrijedi da je na lomnoj frekvenciji jednaka 45° , za niže frekvencije jednaka je 0° , a za više frekvencije jednaka je 90° . Prilikom aproksimacije fazno frekvencijske

karakteristike pravcima, faza će dekadu prije lomne frekvencije⁸ početi rasti za 45° po dekadi, a završit će rasti dekadu nakon lomne frekvencije⁹. Razlika između stvarne i aproksimirane fazno frekvencijske karakteristike prikazana je na slici 6.6.



Slika 6.6: Fazno frekvencijska karakteristika (stvarna i aproksimirana pravcima)

Pokušajmo sada nacrtati Bodeov dijagram za jednostavan sustav $G(s)$:

$$G(s) = \frac{s + 100}{s + 10}. \quad (6.53)$$

Izraz (6.53) najprije ćemo zapisati u obliku u kojemu se prepoznaju lomne frekvencije i pojačanje sustava:

$$G(s) = \frac{s + 100}{s + 10} = \frac{100 \left(\frac{s}{100} + 1 \right)}{10 \left(\frac{s}{10} + 1 \right)} = 10 \frac{\left(\frac{s}{100} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{10} + 1 \right)}. \quad (6.54)$$

Uvođenjem supstitucije $s = j\omega$ u prijenosnu funkciju (6.54) dobit ćemo:

$$G(j\omega) = 10 \frac{\left(\frac{j\omega}{100} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{10} + 1 \right)}. \quad (6.55)$$

Ako izraz (6.55) zapišemo u obliku:

$$G(j\omega) = K \frac{G_{n1}(j\omega)}{G_{p1}(j\omega)}, \quad (6.56)$$

tada je apsolutna vrijednost od $G(j\omega)$ jednaka:

$$|G(j\omega)| = |K| \frac{|G_{n1}(j\omega)|}{|G_{p1}(j\omega)|}, \quad (6.57)$$

⁸Na frekvenciji 10 puta manjoj od lomne frekvencije

⁹Na frekvenciji 10 puta većoj od lomne frekvencije

a faza od $G(j\omega)$ jednaka:

$$\arg(G(j\omega)) = \arg(K) + \arg(G_{n1}(j\omega)) - \arg(G_{p1}(j\omega)). \quad (6.58)$$

Iz izraza (6.55) možemo očitati pojedine komponente izraza (6.56):

$$\begin{aligned} K &= 10 \\ G_{n1}(j\omega) &= \frac{j\omega}{100} + 1 \\ G_{p1}(j\omega) &= \frac{j\omega}{10} + 1. \end{aligned} \quad (6.59)$$

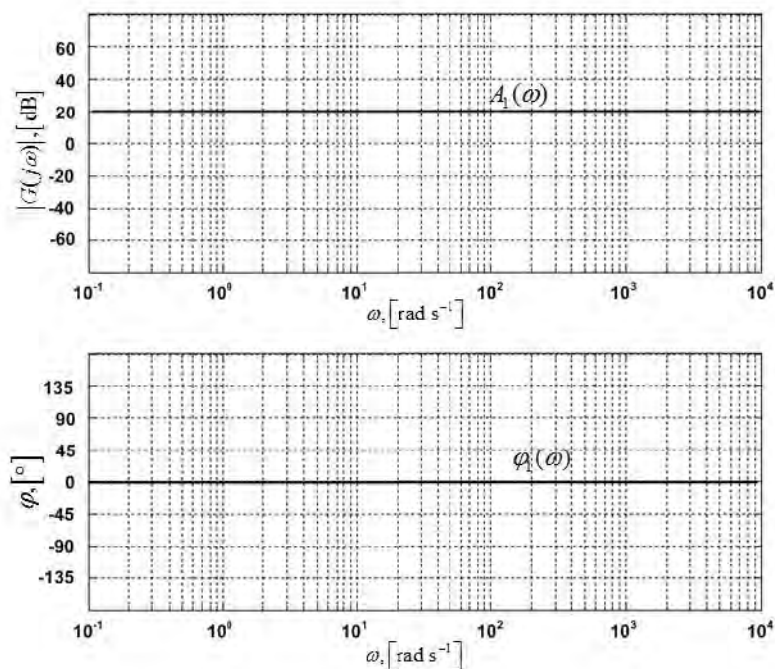
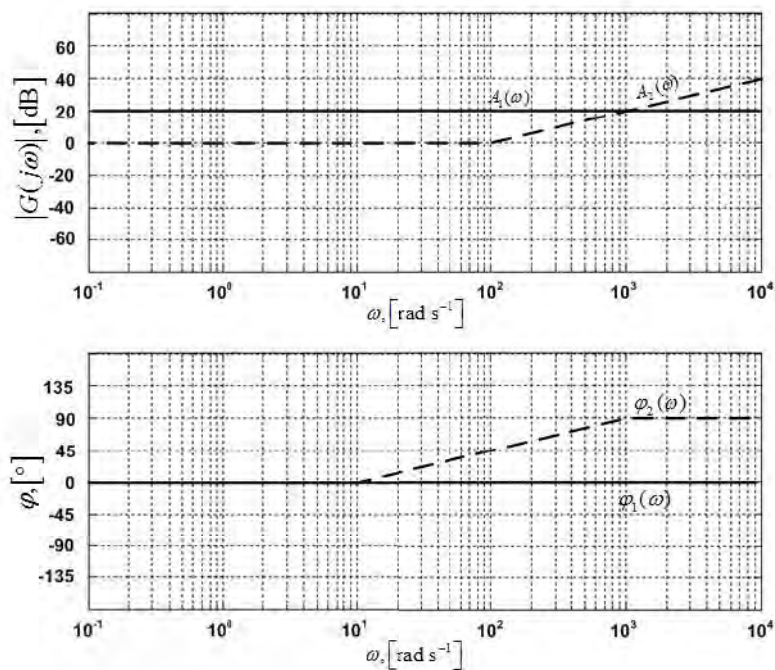
Proračunajmo sada amplitudno frekvencijsku i fazno frekvencijsku karakteristiku:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= |K| \frac{|G_{n1}(j\omega)|}{|G_{p1}(j\omega)|} = 10 \frac{\left| \frac{j\omega}{100} + 1 \right|}{\left| \frac{j\omega}{10} + 1 \right|} = 10 \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{100}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{10}\right)^2 + 1}} \\ \arg(G(j\omega)) &= \arg(K) + \arg(G_{n1}(j\omega)) - \arg(G_{p1}(j\omega)) = \\ &= 0 + \arctan\left(\frac{\omega}{100}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Primjenom logaritmiranja dobit ćemo:

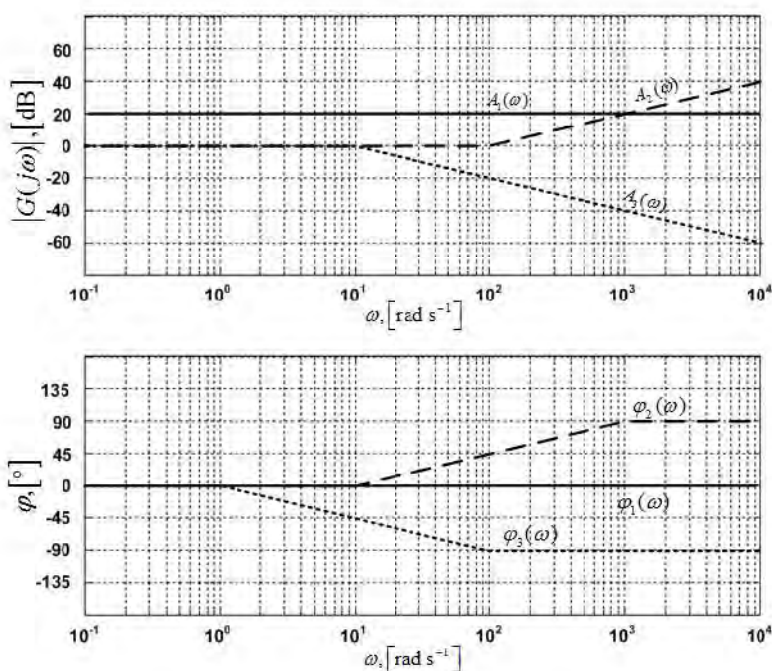
$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log \left(10 \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{100}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{10}\right)^2 + 1}} \right) = \underbrace{20 \log 10}_{A_1(\omega)} + \underbrace{20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{100}\right)^2 + 1}}_{A_2(\omega)} \\ &\quad - \underbrace{20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{10}\right)^2 + 1}}_{A_3(\omega)} \\ \arg(G(j\omega)) &= \underbrace{0}_{\varphi_1(\omega)} + \underbrace{\arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)}_{\varphi_2(\omega)} - \underbrace{\arctan\left(\frac{\omega}{10}\right)}_{\varphi_3(\omega)}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Nacrtajmo najprije pojedinačno segmente izraza (6.61) $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ i $A_3(\omega)$ za amplitudno frekvencijsku i $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ i $\varphi_3(\omega)$ za fazno frekvencijsku karakteristiku, a zatim ih grafički zbrojimo. Segment $A_1(\omega)$ je konstanta ($A_1(\omega) = 20 \log 10 = 20$) u amplitudno frekvencijskoj karakteristici dok je $\varphi_1(\omega) = 0$ u fazno frekvencijskoj karakteristici (slika 6.7).

Slika 6.7: Amplitudna i fazna frekvencijska karakteristika ($A_1(\omega), \varphi_1(\omega)$)Slika 6.8: Amplitudna i fazna frekvencijska karakteristika ($A_1(\omega)$ i $A_2(\omega), \varphi_1(\omega)$ i $\varphi_2(\omega)$)

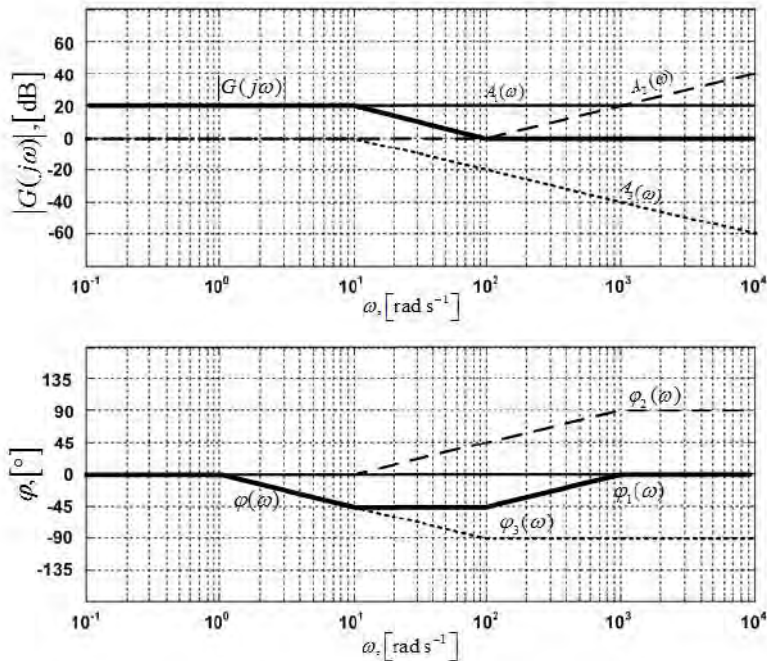
Segment amplitudno frekvencijske karakteristike $A_2(\omega)$ konstanta je do lomne frekvencije $\omega_{Ln1} = 100 \text{ rad/s}$, a nakon lomne frekvencije raste s 20 dB po dekadi. Faza $\varphi_2(\omega)$ konstantna je i jednaka 0° do $0.1\omega_{Ln1}$. Nakon toga faza raste s 45° po dekadi do $10\omega_{Ln1}$. Na frekvencijama jednakim i višim od $10\omega_{Ln1}$ faza ima vrijednost 90° (slika 6.8).

Segment amplitudno frekvencijske karakteristike $A_3(\omega)$ konstanta je do lomne frekvencije $\omega_{Lp1} = 10$, a nakon lomne frekvencije pada s 20 dB po dekadi. Faza $\varphi_3(\omega)$ konstantna je i jednaka 0° do $0.1\omega_{Lp1}$. Nakon toga faza pada s 45° po dekadi do $10\omega_{Lp1}$. Na frekvencijama jednakim i višim od $10\omega_{Lp1}$ faza ima vrijednost -90° (slika 6.9).



Slika 6.9: Amplitudna i fazna frekvencijska karakteristika ($A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ i $A_3(\omega)$, $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ i $\varphi_3(\omega)$)

Nakon što smo nacrtali pojedini segment potrebno je samo grafički zbrojiti pojedine segmente amplitudne i fazne frekvencijske karakteristike i dobit ćemo Bodeov dijagram sustava (6.53) (slika 6.10).



Slika 6.10: Amplitudna i fazna frekvencijska karakteristika ($A_1(\omega) + A_2(\omega) + A_3(\omega)$, $\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega)$)

6.3 Frekvencijski odziv proporcionalnog člana nultog reda (P0 član)

Prijenosna funkcija P0 člana je:

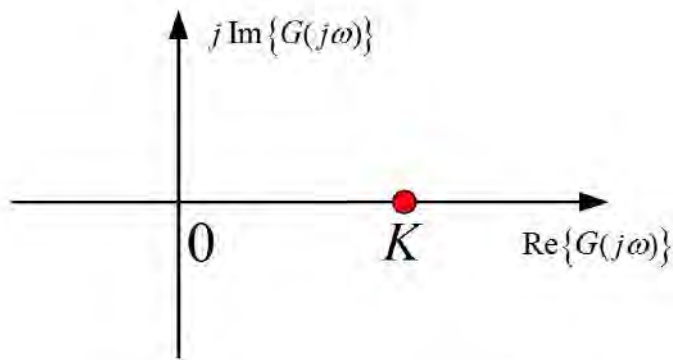
$$G(s) = K. \quad (6.62)$$

U izraz (6.62) uvrstimo supstituciju $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = K. \quad (6.63)$$

6.3.1 Nyquistov dijagram P0 člana

Ovaj je slučaj jednostavan jer egzistira samo realna vrijednost pojačanja sustava K uz imaginarnu vrijednost 0. Nyquistov dijagram P0 člana prikazan je na slici 6.11.



Slika 6.11: Nyquistov dijagram P0 člana

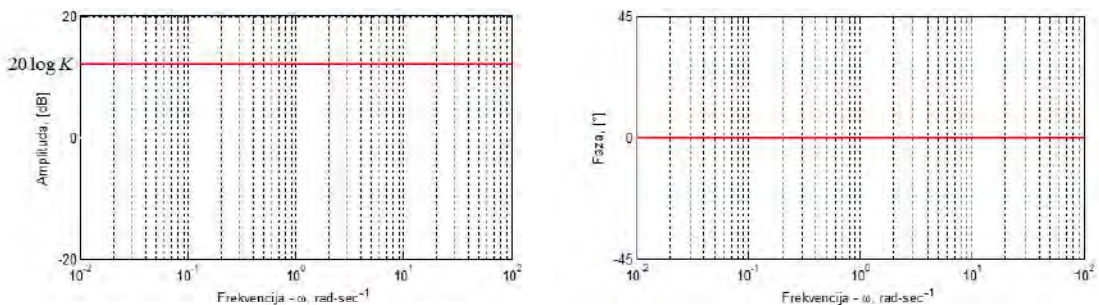
6.3.2 Bodeov dijagram P0 člana

Amplitudno frekvencijska karakteristika P0 člana je:

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |K|, \quad (6.64)$$

Fazno frekvencijska karakteristika P0 člana je:

$$\arg(G(j\omega)) = \begin{cases} 0 & \text{za } K > 0 \\ -180^\circ & \text{za } K < 0 \end{cases} \quad (6.65)$$



Slika 6.12: Bodeov dijagram P0 člana (aproksimacija pravcima)

Na slici 6.12 prikazan je Bodeov dijagram P0 člana.

6.4 Frekvencijski odziv proporcionalnog člana prvog reda (PT1 član)

Prijenosna funkcija PT1 člana je:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}. \quad (6.66)$$

U izraz (6.66) uvrsti se supstitucija $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}. \quad (6.67)$$

6.4.1 Nyquistov dijagram PT1 člana

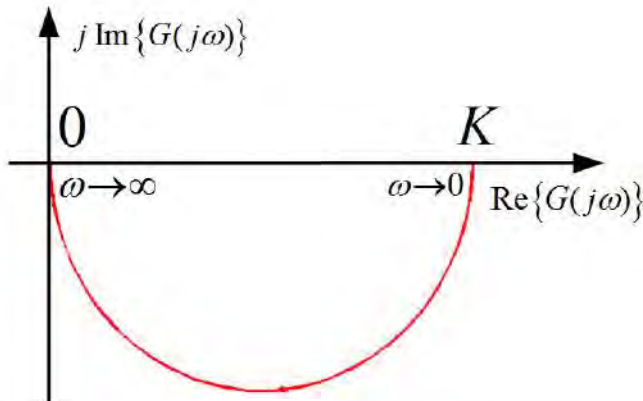
Prijenosnu funkciju PT1 člana $G(j\omega)$ potrebno je najprije zapisati u obliku $\text{Re}\{G(j\omega)\} + j\text{Im}\{G(j\omega)\}$:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{jT\omega + 1} \frac{-jT\omega + 1}{-jT\omega + 1} \\ G(j\omega) &= \frac{K}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{KT\omega}{T^2\omega^2 + 1}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Realni dio Nyquistove krivulje uvijek će biti pozitivan, a imaginarni dio uvijek negativan (s obzirom da promatramo samo pozitivne frekvencije). Nyquistova krivulja egzistirat će u IV. kvadrantu. Pogledajmo što se događa u točkama kada $\omega \rightarrow 0$ i kada $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}\{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{T^2\omega^2 + 1} = K, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}\{G(j\omega)\} = \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Re}\{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{T^2\omega^2 + 1} = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im}\{G(j\omega)\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} -\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} = 0. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Nyquistov dijagram P1 člana prikazan je na slici 6.13.



Slika 6.13: Nyquistov dijagram PT1 člana

6.4.2 Bodeov dijagram PT1 člana

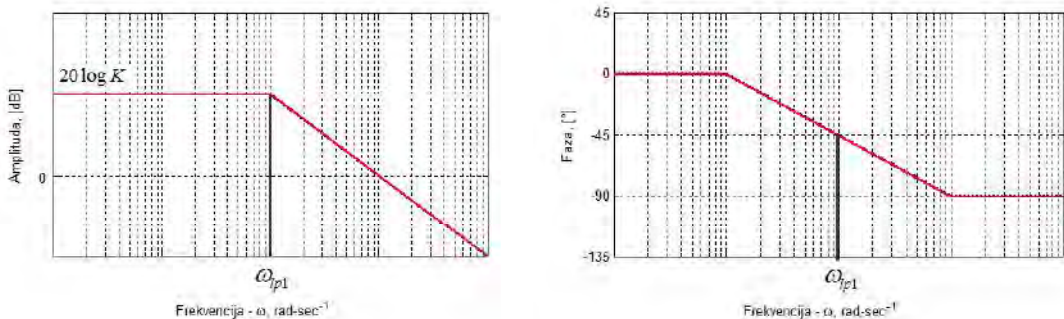
Amplitudno frekvencijska karakteristika PT1 člana je:

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{K}{jT\omega + 1} \right| = 20 \log K - 20 \log \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \sqrt{\frac{\omega^2}{\frac{1}{T^2}} + 1}, \omega_{lp1} = \frac{1}{T} \quad (6.70)$$

gdje je ω_{lp1} lomna frekvencija. Fazno frekvencijska karakteristika PT1 člana je:

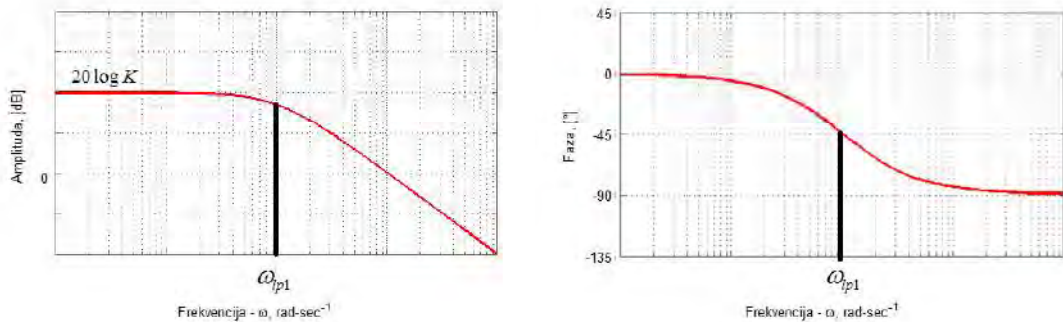
$$\arg(G(j\omega)) = -\arctan \left(\frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}} \right) = -\arctan(T\omega) = -\arctan \left(\frac{\omega}{\frac{1}{T}} \right), \omega_{lp1} = \frac{1}{T}. \quad (6.71)$$



Slika 6.14: Bodeov dijagram PT1 člana (aproksimacija pravcima)

Na slici 6.14 prikazan je Bodeov dijagram PT1 člana aproksimiran pravcima. Na lomnoj frekvenciji ω_{lp1} amplitudno fazna karakteristika počinje opadati s 20 dB po dekadi. Dekadu prije lomne frekvencije ω_{lp1} fazno frekvencijska karakteristika počinje padati s 45° po dekadi, a dekadu nakon lomne frekvencije ω_{lp1} poprima konstantnu vrijednost od -90° .

Bodeov dijagram PT1 člana bez aproksimacija prikazan je na slici 6.15.



Slika 6.15: Bodeov dijagram PT1 člana

6.5 Frekvencijski odziv proporcionalnog člana drugog reda (PT2 član)

Prijenosna funkcija PT2 člana je:

$$G(s) = \frac{K}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}. \quad (6.72)$$

U izraz (6.72) uvrsti se supstitucija $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - T_1 T_2 \omega^2 + j(T_1 + T_2)\omega}. \quad (6.73)$$

6.5.1 Nyquistov dijagram PT2 člana

Prijenosnu funkciju PT2 člana $G(j\omega)$ potrebno je najprije zapisati u obliku

$\text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\}$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - T_1 T_2 \omega^2 + j(T_1 + T_2)\omega} \frac{1 - T_1 T_2 \omega^2 - j(T_1 + T_2)\omega}{1 - T_1 T_2 \omega^2 - j(T_1 + T_2)\omega} \quad (6.74)$$

$$G(j\omega) = \frac{K(1 - T_1 T_2 \omega^2)}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + ((T_1 + T_2)\omega)^2} - j \frac{K(T_1 + T_2)\omega}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + ((T_1 + T_2)\omega)^2}.$$

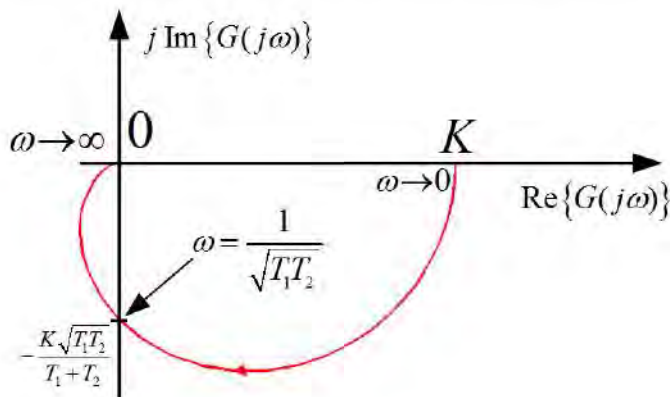
Imaginarni dio Nyquistove krivulje uvijek će biti negativan (s obzirom da promatramo samo pozitivne frekvencije). Realni dio može poprimiti i pozitivne i negativne vrijednosti što znači da će Nyquistova krivulja egzistirati u III. i IV. kvadrantu. Pogledajmo što se događa u točkama kada $\omega \rightarrow 0$ i kada $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}\{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K(1 - T_1 T_2 \omega^2)}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + ((T_1 + T_2)\omega)^2} = K \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}\{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{K(T_1 + T_2)\omega}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + ((T_1 + T_2)\omega)^2} = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Re}\{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K(1 - T_1 T_2 \omega^2)}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + ((T_1 + T_2)\omega)^2} = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im}\{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} -\frac{K(T_1 + T_2)\omega}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + ((T_1 + T_2)\omega)^2} = 0. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Frekvencija na kojoj Nyquistova krivulja siječe imaginarnu os je ona frekvencija za koju vrijedi da je $\text{Re}\{G(j\omega)\} = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{G(j\omega)\} = 0 &\Rightarrow \frac{K(1 - T_1 T_2 \omega^2)}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + ((T_1 + T_2)\omega)^2} = 0 \\ K(1 - T_1 T_2 \omega^2) = 0 &\Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \\ G(j \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}) &= -j \frac{K\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Nyquistov dijagram PT2 člana prikazan je na slici 6.16.



Slika 6.16: Nyquistov dijagram PT2 člana

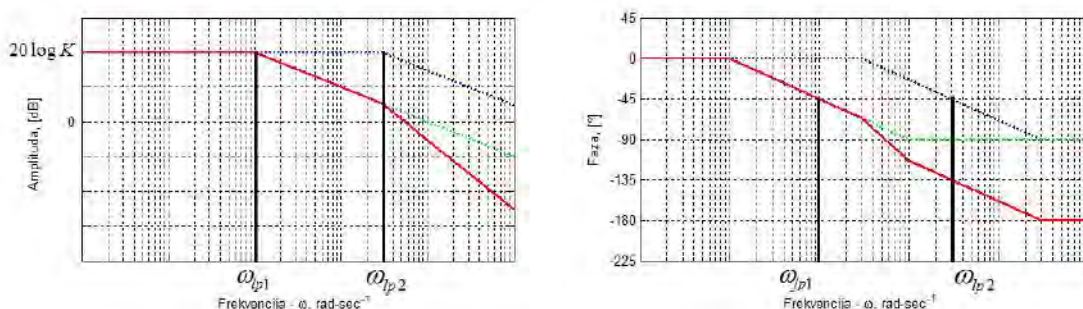
6.5.2 Bodeov dijagram PT2 člana

Amplitudno frekvencijska karakteristika PT2 člana je:

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{K}{1 - T_1 T_2 \omega^2 + j(T_1 + T_2)\omega} = \frac{K}{(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)} \\
 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log \left| \frac{K}{(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)} \right| = 20 \log \frac{K}{|(jT_1\omega + 1)| |(jT_2\omega + 1)|} \\
 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log K - 20 \log \sqrt{(T_1\omega)^2 + 1} - 20 \log \sqrt{(T_2\omega)^2 + 1} \\
 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\frac{1}{T_1}}\right)^2 + 1} - 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\frac{1}{T_2}}\right)^2 + 1} \\
 \omega_{lp1} &= \frac{1}{T_1}, \omega_{lp2} = \frac{1}{T_2}.
 \end{aligned} \tag{6.77}$$

Fazno frekvencijska karakteristika PT2 člana je:

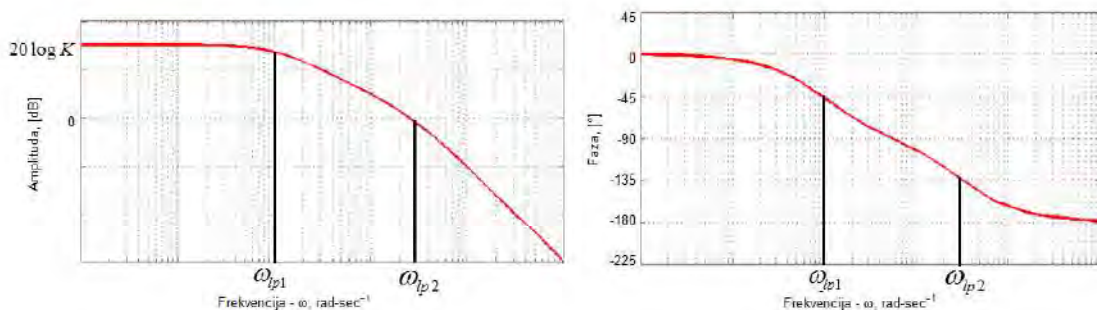
$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{K}{1 - T_1 T_2 \omega^2 + j(T_1 + T_2)\omega} = \frac{K}{(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)} \\
 \arg(G(j\omega)) &= -\arctan(T_1\omega) - \arctan(T_2\omega), \omega_{lp1} = \frac{1}{T_1}, \omega_{lp2} = \frac{1}{T_2}.
 \end{aligned} \tag{6.78}$$



Slika 6.17: Bodeov dijagram PT2 člana (aproksimacija pravcima)

Na slici 6.17 prikazan je Bodeov dijagram PT2 člana. S obzirom da je PT2 član zapravo kaskada (serija) dva PT1 članova, Bodeovi dijagrami dva PT1 članova samo se zbroje (slika 6.17). Prvi PT1 član ima lomnu frekvenciju ω_{lp1} , a drugi PT1 član ima lomnu frekvenciju ω_{lp2} . Zbroj Bodeovih dijagrama PT1 članova dat će Bodeov dijagram PT2 člana. Na lomnoj frekvenciji ω_{lp1} amplitudno fazna karakteristika počinje opadati s 20 dB po dekadi. Nakon lomne frekvencije ω_{lp2} amplituda opada za još 20 dB po dekadi, odnosno ukupno s 40 dB po dekadi. Ako promatramo fazno frekvencijsku karakteristiku, tada vrijedi da dekadu prije lomne frekvencije ω_{lp1} fazno frekvencijska karakteristika počinje padati s 45° po dekadi, a dekadu nakon lomne frekvencije ω_{lp1} ponovno postaje konstantna. Isto vrijedi i za lomnu frekvenciju ω_{lp2} . Fazno frekvencijska karakteristika poprima konstantnu vrijednost od -180° dekadu nakon lomne frekvencije ω_{lp2} .

Bodeov dijagram PT2 člana bez aproksimacija prikazan je na slici 6.18.



Slika 6.18: Bodeov dijagram PT2 člana

6.6 Frekvencijski odziv proporcionalnog člana drugog reda s prigušenim oscilatornim ponašanjem (PT2S član)

Prijenosna funkcija PT2S člana je:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad (6.79)$$

za $0 < \zeta < 1$.

U izraz (6.79) uvrsti se supstitucija $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega} \quad (6.80)$$

6.6.1 Nyquistov dijagram PT2S člana

Prijenosnu funkciju PT2S člana $G(j\omega)$ potrebno je najprije zapisati u obliku $\text{Re}\{G(j\omega)\} + j\text{Im}\{G(j\omega)\}$:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega} \\ G(j\omega) &= \frac{K \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2} - j \frac{K \frac{2\zeta}{\omega_n}\omega}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Imaginarni dio Nyquistove krivulje uvijek će biti negativan (s obzirom da promatramo samo pozitivne frekvencije). Realni dio može poprimiti i pozitivne i negativne vrijednosti što znači da će Nyquistova krivulja egzistirati u III. i IV. kvadrantu. Pogle-

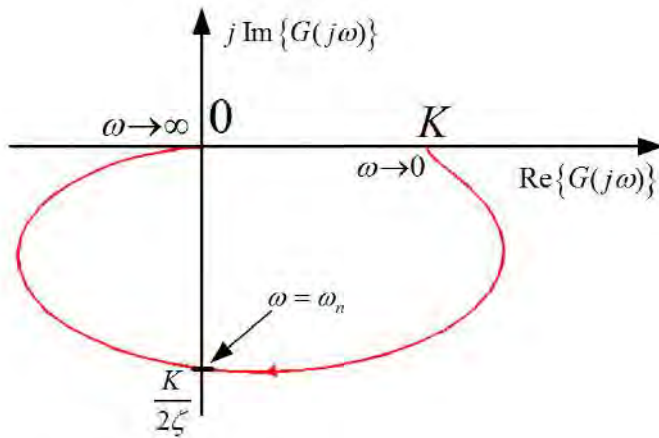
dajmo što se događa u točkama kada $\omega \rightarrow 0$ i kada $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2} = K \\
 \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im} \{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{K \frac{2\zeta}{\omega_n}\omega}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2} = 0 \\
 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2} = 0 \\
 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} -\frac{K \frac{2\zeta}{\omega_n}\omega}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.82}$$

Frekvencija na kojoj Nyquistova krivulja siječe imaginarnu os je ona frekvencija za koju vrijedi da je $\operatorname{Re} \{G(j\omega)\} = 0$:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \{G(j\omega)\} &= \frac{K \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2} = 0 \\
 K \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) &= 0 \Rightarrow \omega = \omega_n \\
 G(j\omega_n) &= -j \frac{K}{2\zeta}.
 \end{aligned} \tag{6.83}$$

Nyquistov dijagram PT2S člana prikazan je na slici 6.19.



Slika 6.19: Nyquistov dijagram PT2S člana

6.6.2 Bodeov dijagram PT2S člana

Amplitudno-frekvencijska karakteristika PT2S člana je:

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega} \right| \quad (6.84)$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \omega\right)^2}.$$

Kod PT2S članova pristup crtanja Bodeovih dijagrama nešto je drugačiji od pristupa gdje smo prijenosnu funkciju opisali kaskadom (serijom) PT1 članova. Imat ćemo ponovno dva slučaja, jedan kada su frekvencije puno manje od lomne frekvencije ($\omega \ll \omega_l$), i jedan kada su frekvencije puno veće od lomne frekvencije ($\omega \gg \omega_l$).

Za frekvencije $\omega \ll \omega_l$ vrijedi:

$$20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \omega\right)^2} \approx 20 \log K. \quad (6.85)$$

Za frekvencije $\omega \gg \omega_l$ vrijedi:

$$\begin{aligned} 20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \omega\right)^2} &\approx 20 \log K - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = \\ &= 20 \log K - 40 \log \frac{\omega}{\omega_n}. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Iz izraza (6.86) vidimo da amplituda pada za 40 dB po dekadi nakon lomne frekvencije ω_l . Ako izjednačimo izraze (6.85) i (6.86), dobit ćemo izraz za lomnu frekvenciju, odnosno frekvenciju gdje se sijeku dva pravca:

$$\begin{aligned} 20 \log K &= 20 \log K - 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log \frac{\omega}{\omega_n} &= 0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow \omega = \omega_n. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Iz izraza (6.87) lomna frekvencija jednaka je prirodnoj frekvenciji ω_n . U okolišu lomne frekvencije ω_n pojavljuje se tzv. rezonantno izdizanje M_r koje ovisi o stupnju prigušenja ζ . Frekvencija na kojoj se javlja rezonantno izdizanje nazivamo rezonantnom frekvencijom. Izraz za rezonantnu frekvenciju dobit ćemo traženjem maksimuma amplitudno frekvencijske karakteristike. Deriviranjem izraza (6.84) dobit ćemo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left(20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2} \right) &= 0 \\ \frac{20}{\ln 10} \frac{\frac{1}{2} \left(-4 \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) \frac{\omega}{\omega_n^2} \right) + 2 \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)^2 \omega \right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2} &= 0 \\ -4 \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) \frac{\omega}{\omega_n^2} \right) + 2 \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)^2 \omega &= 0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 2\zeta^2 \Big|_{\omega=\omega_r} \Rightarrow \\ \omega_r &= \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Ako od izraza (6.84) oduzmemo komponentu pojačanja $20 \log K$, dobit ćemo rezonantno izdizanje M_r koje se pojavljuje na rezonantnoj frekvenciji ω_r :

$$M_r [dB] = -20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2} \Big|_{\omega=\omega_r} = -20 \log(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}). \quad (6.89)$$

Iz izraza (6.89) možemo zaključiti da rezonantno izdizanje ovisi samo o faktoru prigušenja ζ . Sada možemo odrediti i za koje ζ će postojati rezonantno izdizanje, odnosno kad je ono veće od 0:

$$-20 \log(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}) \geq 0 \Rightarrow \log(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}) \leq 0 \Rightarrow (2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}) \leq 1 \Rightarrow \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (6.90)$$

S obzirom da za stabilne sustave (o stabilnosti sustava u sljedećem poglavlju) vrijedi da je $\zeta \geq 0$, vrijedi da će se rezonantno izdizanje pojavljivati za $0 \leq \zeta \leq 0.707$. Kod

crtanja Bodeovih dijagrama PT2S članova potrebno je odrediti rezonantnu frekvenciju i rezonantno izdizanje te ih nacrtati u obliku okomitog pravca s kružićem na vrhu, a visina tog pravca na rezonantnoj frekvenciji bit će jednaka iznosu rezonantnog izdizanja (detaljnije kod crtanja Bodeovog dijagrama PT2S člana).

Fazno-frekvencijska karakteristika PT2S člana je:

$$\arg(G(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right). \quad (6.91)$$

Za frekvencije $\omega \ll \omega_l$ vrijedi:

$$\arg(G(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \approx 0^\circ. \quad (6.92)$$

Za frekvencije $\omega \gg \omega_l$ vrijedi:

$$\arg(G(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \approx -180^\circ. \quad (6.93)$$

Na prijelomnoj frekvenciji $\omega = \omega_n$ vrijedi:

$$\arg(G(j\omega_n)) = -\arctan\left(\frac{2\zeta}{0}\right) = -90^\circ. \quad (6.94)$$

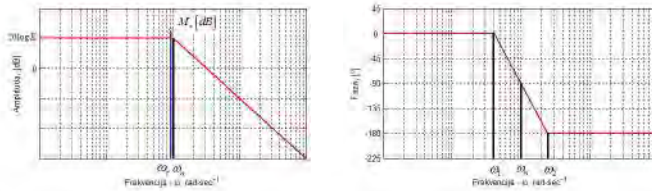
Način na koji se crta fazno frekvencijska karakteristika oko lomne frekvencije ω_n nije jednostavan kao kod PT1 članova. Kao pomoć pri crtanju fazno frekvencijske karakteristike često se koristi literatura u kojoj su već nacrtani grafovi za različite faktore prigušenja ζ . Nagib fazno frekvencijske karakteristike na lomnoj frekvenciji ω_n ovisi samo o faktoru prigušenja. Drugi način za crtanje fazno frekvencijske karakteristike [14] oko lomne frekvencije ω_n je taj da se napravi pravac koji siječe niskofrekvencijsku asimptotu od 0° na frekvenciji:

$$\omega_1 = \omega_n \frac{\log\left(\frac{2}{\zeta}\right)}{2}, \quad (6.95)$$

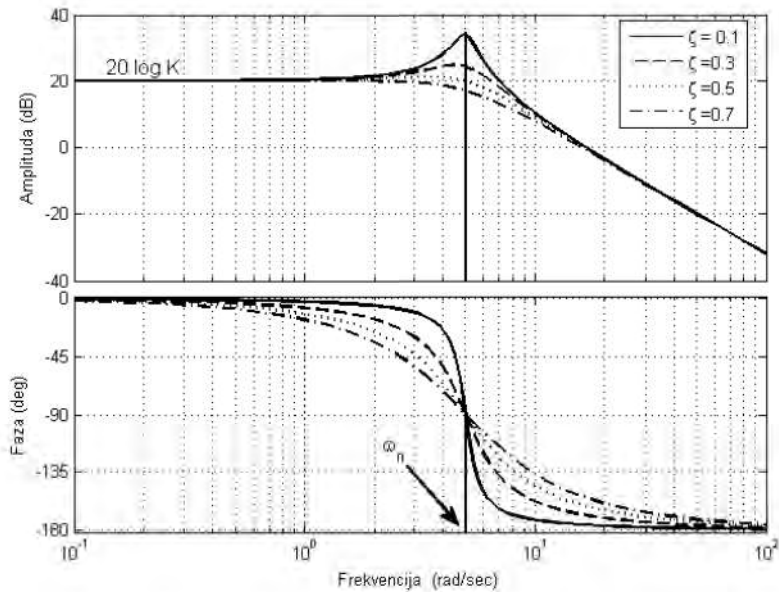
prolazi kroz lomnu frekvenciju ω_n i siječe visokofrekvencijsku asimptotu od -180° na frekvenciji:

$$\omega_2 = \omega_n \frac{2}{\log\left(\frac{2}{\zeta}\right)}. \quad (6.96)$$

Za faktore prigušenja $\zeta \leq 0.02$ kroz lomnu frekvenciju provuče se vertikalna linija koja spaja niskofrekvencijsku i visokofrekvencijsku asimptotu. Bodeov dijagram PT2S člana prikazan je na slici 6.20.



Slika 6.20: Bodeov dijagram PT2S člana (aproksimacija pravcima)



Slika 6.21: Bodeov dijagram PT2S člana

Bodeovi dijagrami PT2S članova bez aproksimacija za različite faktore prigušenja ζ prikazani su na slici 6.21. Što je faktor prigušenja ζ manji, to je rezonantno uzdizanje M_r veće.

6.7 Frekvencijski odziv derivacijskog člana (D član)

Prijenosna funkcija D člana je:

$$G(s) = K_d s. \quad (6.97)$$

U izraz (6.97) uvrsti se supstitucija $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = K_d j\omega. \quad (6.98)$$

Unutar ovog poglavlja obradit ćemo i realni derivacijski član (DT1) čija je prijenosna funkcija dana sljedećim izrazom:

$$G(s) = \frac{K_d s}{T_d s + 1}. \quad (6.99)$$

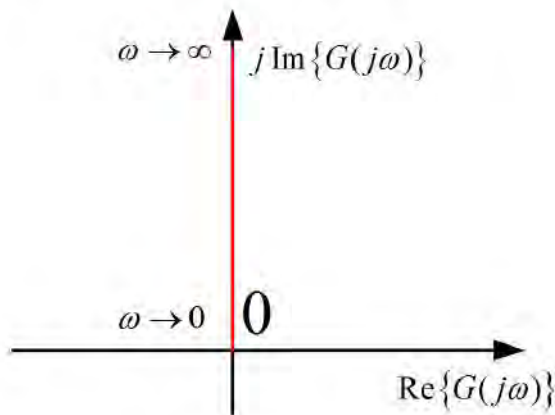
U izraz (6.99) uvrsti se supstitucija $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{K_d j\omega}{T_d j\omega + 1}. \quad (6.100)$$

6.7.1 Nyquistov dijagram D člana

Prijenosna funkcija D člana $G(j\omega)$ ima samo imaginarnu komponentu $j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$. Nyquistova krivulja D člana pozitivni je dio imaginarne osi.

Nyquistov dijagram D člana prikazan je na slici 6.22.



Slika 6.22: Nyquistov dijagram D člana

6.7.2 Nyquistov dijagram DT1 člana

Prijenosnu funkciju DT1 člana $G(j\omega)$ potrebno je najprije zapisati u obliku $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$:

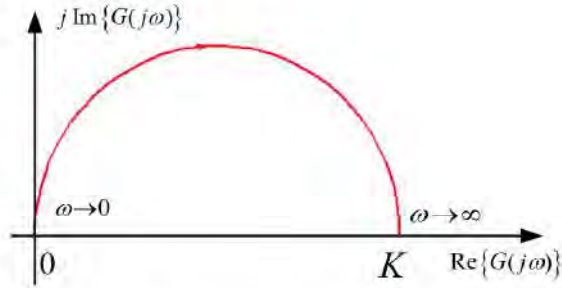
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K_d j\omega}{T_d j\omega + 1} = \frac{-T_d j\omega + 1}{T_d j\omega + 1} \\ G(j\omega) &= \frac{K_d T_d \omega^2}{(T_d \omega)^2 + 1} + j \frac{K_d \omega}{(T_d \omega)^2 + 1}. \end{aligned} \quad (6.101)$$

I realni i imaginarni dio Nyquistove krivulje uvijek će biti pozitivan. Nyquistova krivulja egzistirat će u I. kvadrantu. Pogledajmo što se događa u točkama kada $\omega \rightarrow 0$

i kada $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K_d T_d \omega^2}{(T_d \omega)^2 + 1} = 0 \\
 \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im} \{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K_d \omega}{(T_d \omega)^2 + 1} = 0 \\
 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K_d T_d \omega^2}{(T_d \omega)^2 + 1} = K \\
 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \{G(j\omega)\} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K_d \omega}{(T_d \omega)^2 + 1} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.102}$$

Nyquistov dijagram DT1 člana prikazan je na slici 6.23.



Slika 6.23: Nyquistov dijagram DT1 člana

6.7.3 Bodeov dijagram D člana

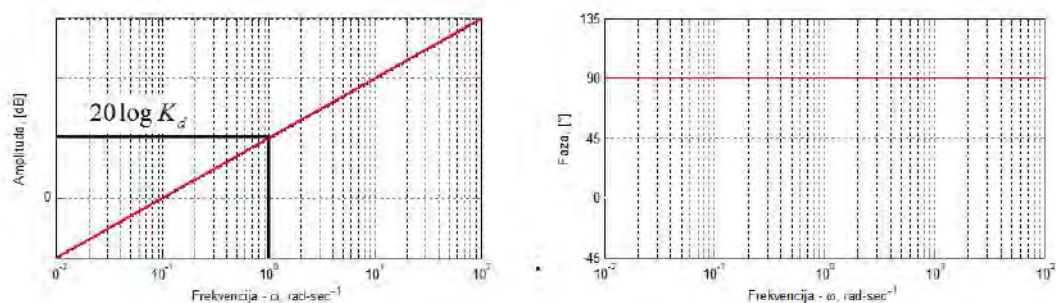
Amplitudno frekvencijska karakteristika D člana je:

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |K_d j\omega| = 20 \log K_d + 20 \log \omega. \tag{6.103}$$

Fazno frekvencijska karakteristika D člana je:

$$\arg(G(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\omega}{0}\right) = 90^\circ. \tag{6.104}$$

Bodeov dijagram D člana prikazan je na slici 6.24.



Slika 6.24: Bodeov dijagram D člana (aproksimacija pravicima)

Pravac s nagibom +20 dB po dekadi podignut je za iznos pojačanja $20 \log K_d$ (slika 6.24).

6.7.4 Bodeov dijagram DT1 člana

Amplitudno frekvencijska karakteristika DT1 člana je:

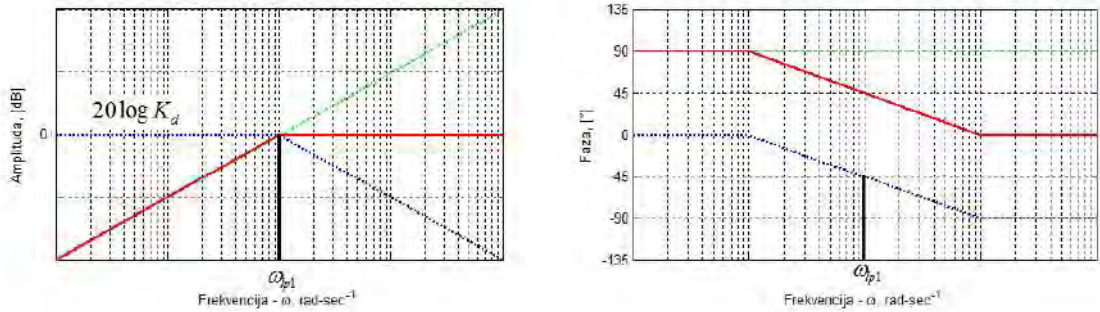
$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{K_d j\omega}{T_d j\omega + 1} \right| = 20 \log K_d + 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{(T_d \omega)^2 + 1} \quad (6.105)$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K_d + 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{(T_d \omega)^2 + 1}, \omega_{lp1} = \frac{1}{T_d}.$$

Fazno frekvencijska karakteristika DT1 člana je:

$$\arg(G(j\omega)) = 90^\circ - \arctan(T_d \omega). \quad (6.106)$$

Bodeov dijagram DT1 člana prikazan je na slici 6.25.



Slika 6.25: Bodeov dijagram DT1 člana (aproksimacija pravcima)

S obzirom da je DT1 član zapravo kaskada (serija) D člana i PT1 člana s pojačanjem 1, Bodeov dijagram DT1 člana je zbroj Bodeovih dijagrama D člana i PT1 člana.

6.8 Frekvencijski odziv integralnog člana (I član)

Prijenosna funkcija I člana je:

$$G(s) = \frac{K_i}{s}. \quad (6.107)$$

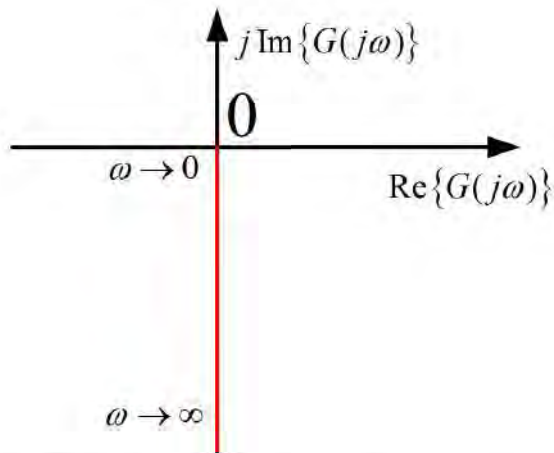
U izraz (6.97) uvrsti se supstitucija $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{K_i}{j\omega}. \quad (6.108)$$

6.8.1 Nyquistov dijagram I člana

Prijenosna funkciju I člana $G(j\omega)$ ima samo imaginarnu komponentu $j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$. Nyquistova krivulja I člana negativni je dio imaginarne osi.

Nyquistov dijagram I člana prikazan je na slici 6.26.



Slika 6.26: Nyquistov dijagram I člana

6.8.2 Bodeov dijagram I člana

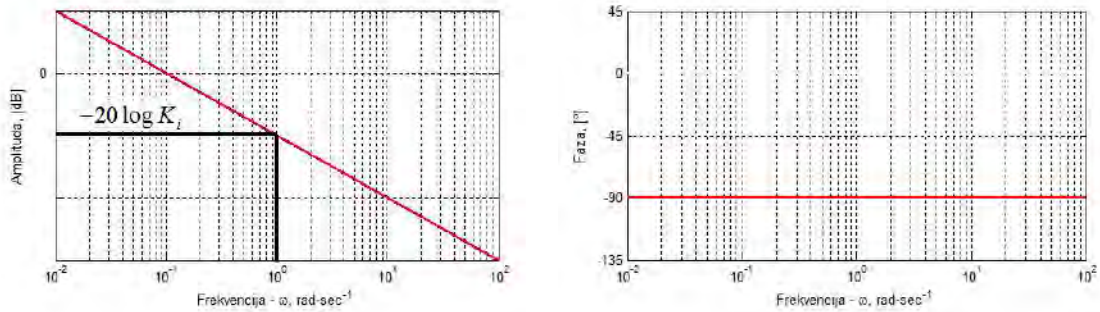
Amplitudno frekvencijska karakteristika I člana je:

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{K_i}{j\omega} \right| = 20 \log K_i - 20 \log \omega. \quad (6.109)$$

Fazno frekvencijska karakteristika I člana je:

$$\arg(G(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega}{0}\right) = -90^\circ. \quad (6.110)$$

Bodeov dijagram I člana prikazan je na slici 6.27.



Slika 6.27: Bodeov dijagram I člana (aproksimacija pravicima)

Pravac s nagibom -20 dB po dekadi podignut je za iznos pojačanja $20 \log K_i$ (slika 6.27).

6.9 Frekvencijski odziv člana s transportnim kašnjenjem

Prijenosna funkcija člana s transportnim kašnjenjem je:

$$G(s) = e^{-\tau s}. \quad (6.111)$$

U izraz (6.97) uvrsti se supstitucija $s = j\omega$:

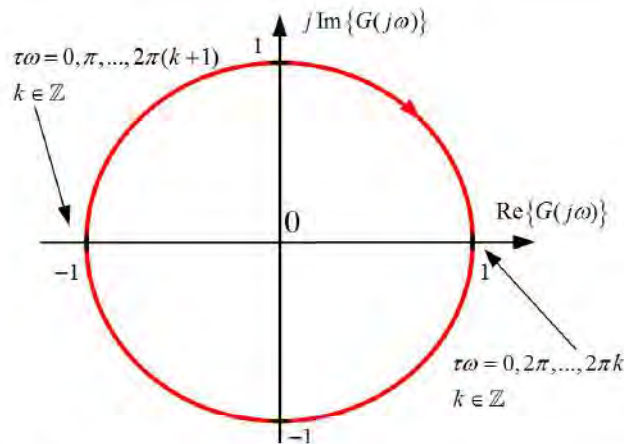
$$G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}. \quad (6.112)$$

6.9.1 Nyquistov dijagram člana s transportnim kašnjenjem

Prijenosnu funkciju člana s transportnim kašnjenjem $G(j\omega)$ potrebno je najprije zapisati u obliku $\text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\}$:

$$G(j\omega) = e^{-j\tau\omega} = \cos(\tau\omega) - j \sin(\tau\omega). \quad (6.113)$$

Iz izraza 6.113 vidimo da će Nyquistova krivulja biti jedinična kružnica. Faza se mijenja u smjeru kazaljke na satu, a ovisi o argumentu $\tau\omega$ (slika 6.28). Nyquistov dijagram člana s transportnim kašnjenjem prikazan je na slici 6.28.



Slika 6.28: Nyquistov dijagram člana s transportnim kašnjenjem

6.9.2 Bodeov dijagram člana s transportnim kašnjenjem

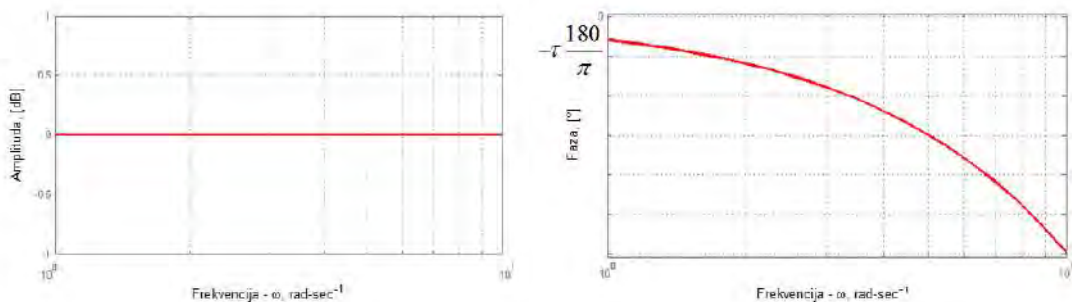
Amplitudno frekvencijska karakteristika člana s transportnim kašnjenjem je:

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |e^{-j\tau\omega}| = 20 \log 1 = 0. \quad (6.114)$$

Fazno frekvencijska karakteristika člana s transportnim kašnjenjem je:

$$\arg(G(j\omega)) = -\tau\omega. \quad (6.115)$$

Bodeov dijagram člana s transportnim kašnjenjem prikazan je na slici 6.29.



Slika 6.29: Bodeov dijagram člana s transportnim kašnjenjem

Pri crtanju fazno frekvencijske karakteristike potrebno je uzeti u obzir da je frekvencijska os u logaritamskom mjerilu te u skladu s tim nacrtati karakteristiku. Ovim članom završili smo frekvencijski odziv osnovnih dinamičkih članova.

Poglavlje 7

Analiza stabilnosti sustava automatskog upravljanja

Stabilnost sustava vrlo je bitna u atomiziranim postrojenjima, mehatroničkim sustavima, elektroničkim sustavima, ekonomskim sustavima i sl. Koliko je stabilnost važna, možemo vidjeti na primjeru nuklearne elektrane. U slučaju da procesi izgaranja nuklearnog goriva nisu stabilni, rezultat proizvodnje električne energije bio bi ekološka katastrofa. U poglavlju *Vremenski odziv osnovnih dinamičkih članova* opisani su odzivi sustava s obzirom na položaj polova u s -ravnini. Tamo je već prikazano da su odzivi sustava stabilni (ne raspiruju se) ako se svi polovi prijenosne funkcije $G(s)$ nalaze u lijevoj s -poluravnini. Pokažimo to i matematički. Linearni sustav automatskog upravljanja stabilan je ako je na proizvoljno ograničenu pobudu njegov odziv također ograničen [2]:

$$\begin{aligned} |u(t)| < M \quad \text{za} \quad 0 < M < \infty \\ |y(t)| < N \quad \text{za} \quad 0 < N < \infty . \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ako stabilnost sustava želimo izraziti preko težinske funkcije $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$, onda za asimptotsku stabilnost mora biti zadovoljeno:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0. \tag{7.2}$$

Težinska se funkcija može dobiti inverznom Laplaceovom transformacijom prijenosne funkcije $G(s)$ ($g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$). Kada se $G(s)$ rastavi na proste razlomke prema Heavisideovom razvoju postoje četiri različita slučaja s obzirom na nultočke nazivnika (polova):

- Polovi su realni i jednostruki
- Polovi su konjugirano kompleksni i jednostruki
- Polovi su realni i višestruki
- Polovi su konjugirano kompleksni i višestruki.

Prosti razlomci prijenosne funkcije $G(s)$ kombinacija su prethodno navedenih slučajeva. Opći oblik pola je:

$$s_{pi} = -\sigma_i \pm j\omega_i \quad (7.3)$$

gdje je:

- σ_i - realni dio pola s_{pi}
- ω_i - imaginarni dio pola s_{pi} .

Prijenosnu funkciju možemo raspisati u obliku prostih razlomaka:

$$G(s) = \frac{C_1}{s + p_1} + \frac{C_2}{s + p_2} + \frac{C_3}{s + p_3} + \frac{C_4}{s + p_4} + \dots + \frac{C_n}{s + p_n} \quad (7.4)$$

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s) + G_4(s) + \dots + G_n(s).$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom izraza (7.4) dobit ćemo težinsku funkciju:

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) + g_4(t) + \dots + g_n(t). \quad (7.5)$$

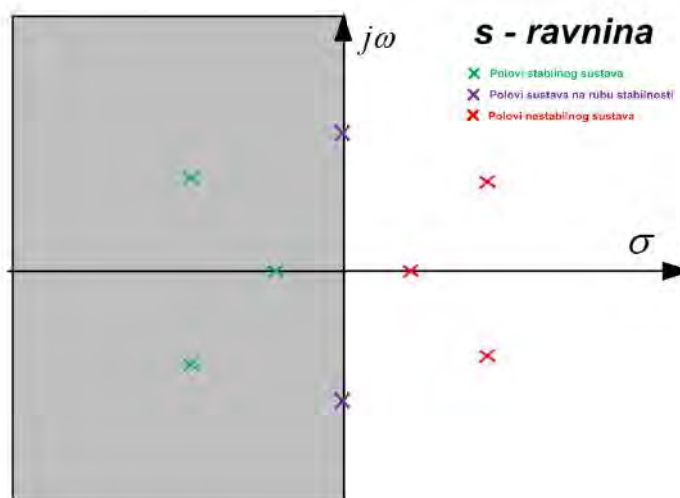
S obzirom na vrstu i višestrukost polova težinske funkcije $g_i(t)$ mogu imati oblik:

- $C_i e^{-\sigma_i t}$ ako su polovi realni i jednostruki
- $e^{-\sigma_i t} (A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t)$ ako su polovi konjugirano kompleksni
- $C_i t^j e^{-\sigma_i t}$ ako su polovi realni i višestruki (broj višestrukosti ponavljanja je r , a $j = [1, 2, \dots, r - 1]$)
- $t^j e^{-\sigma_i t} (A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t)$ ako su polovi konjugirano kompleksni i višestruki (broj višestrukosti ponavljanja je r , a $j = [1, 2, \dots, r - 1]$).

Općenitu težinsku funkciju možemo zapisati kao linearnu kombinaciju prethodna četiri slučaja. Da bi sustav bio aperiodski stabilan, zadovoljen mora biti izraz (7.2), odnosno težinska funkcija mora iščezavati s vremenom. Težinska funkcija će iščezavati ako iščezavaju eksponencijalni članovi težinske funkcije:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} C_i e^{-\sigma_i t} &= 0 \quad \text{ako} \quad \sigma_i > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{s_{pi} < 0\} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma_i} (A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t) &= 0 \quad \text{ako} \quad \sigma_i > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{s_{pi} < 0\} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} C_i t^j e^{-\sigma_i t} &= 0 \quad \text{ako} \quad \sigma_i > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{s_{pi} < 0\} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^j e^{-\sigma_i} (A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t) &= 0 \quad \text{ako} \quad \sigma_i > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{s_{pi} < 0\}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

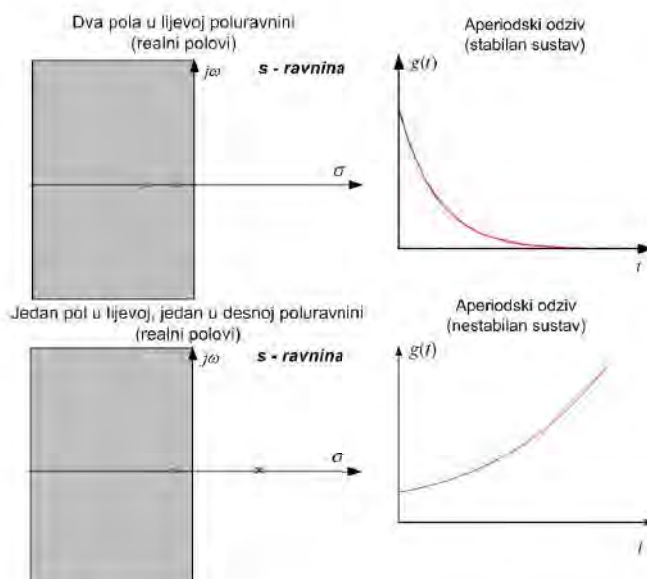
U svim slučajevima eksponencijalni članovi iščezavaju ako i samo ako su realni dijelovi polova strogo negativni ($\operatorname{Re}\{s_{pi} < 0\}$). Stoga će sustav biti stabilan samo ako su svi polovi u lijevoj s poluravnini (slika 7.1 sivo područje).



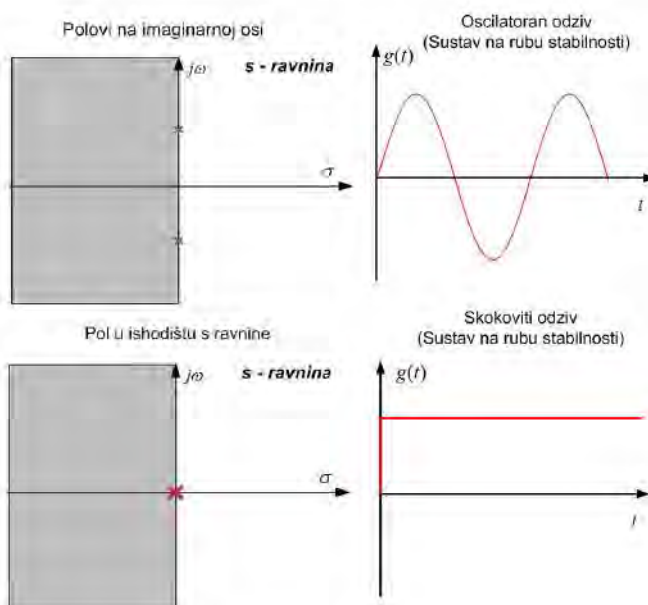
Slika 7.1: S - ravnina (stabilnost sustava)

Sustav se s obzirom na razmještaj polova u s ravnini dijeli na (slika 7.1):

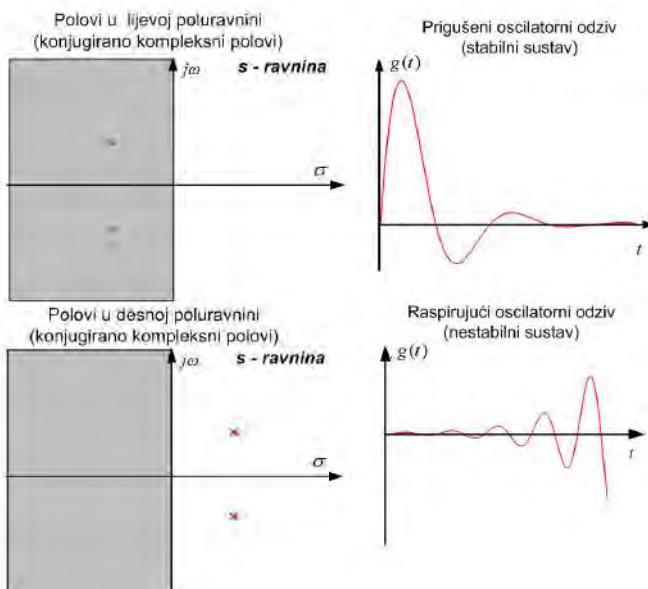
- Stabilne sustave (polovi u sivom području slike 7.1, lijeva s -poluravnina)
- Granično stabilne sustave, odnosno sustave na rubu stabilnosti (polovi na imaginarnoj osi)
- Nestabilne sustave (polovi u bijelom području slike 7.1, desna s -poluravnina)



Slika 7.2: Stabilnost aperiodskih sustava



Slika 7.3: Sustavi na rubu stabilnosti



Slika 7.4: Stabilnost prigušenih i raspirujućih oscilatornih sustava

Na slikama (7.2), (7.3) i (7.4) prikazane su težinske funkcije s obzirom na položaj polova. Još jednom smo pokazali da realni dio polova mora egzistirati strogo u lijevoj s-poluravnini da bi sustav bio stabilan. Sve metode stabilnosti koje ćemo obraditi u

nastavku, algebarske ili frekvencijske, zapravo se temelje na tome da su svi polovi u lijevoj s -poluravnini. Za sustave koji su na rubu stabilnosti (slika (7.3)) dovoljan je i najmanji poremećaj da sustav postane nestabilan (naravno, može postati i stabilan). Ako se u sustavu automatskog upravljanja koristi povratna veza, tada se polovi sustava izračunavaju iz relacije (4.15) tako da se nazivnik izjednači s nulom:

$$1 + G_{PV}(s)G_o(s) = 0. \quad (7.7)$$

Jednadžba (7.7) naziva se karakteristična jednadžba sustava. Metoda određivanja stabilnosti sustava izračunavanjem polova iz izraza (7.7) jednostavan je i lak zadatak za sustave prvog, drugog i eventualno trećeg reda jer postoje egzaktno metode za određivanje nultočaka polinoma. Za sustave višeg reda potrebno je koristiti algebarske i frekvencijske metode za određivanje stabilnosti sustava jer ne postoje egzaktno metode za određivanje nultočaka polinoma.

7.1 Algebarski kriteriji stabilnosti

Algebarski kriteriji stabilnosti su kriteriji stabilnosti za koje nije potrebno rješavati diferencijalnu jednadžbu kako bismo ocijenili da li je sustav stabilan ili nije, odnosno nije potrebno računati polove prijenosne funkcije sustava. Ove se metode temelje na korištenju koeficijenata diferencijalne jednadžbe (prijenosne funkcije) za određivanje nalaze li se polovi u lijevoj ili desnoj poluravnini. U ovom poglavlju obradit ćemo dva algebarska kriterija stabilnosti:

- Hurwitzov kriterij stabilnosti
- Routhov kriterij stabilnosti

7.1.1 Hurwitzov kriterij stabilnosti

Hurwitzov kriterij stabilnosti [9] temelji se na diferencijalnoj jednadžbi zatvorenog regulacijskog kruga, odnosno na prijenosnoj funkciji zatvorenog regulacijskog kruga. Kriterij se primjenjuje na karakterističnu jednadžbu (7.7):

$$1 + G_o(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (7.8)$$

Na temelju karakteristične jednadžbe (7.8) potrebno je sastaviti determinantu (7.9):

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}. \quad (7.9)$$

Iz izraza (7.9) jasno se vidi pravilo kako se popunjava Hurwitzova determinanta Δ_n . Dimenzija determinante je $n \times n$, gdje je n red sustava. Na glavnu se dijagonalu, počevši odozgo, pišu redom svi koeficijenti počevši s a_{n-1} do a_0 . Iznad svih koeficijenata glavne dijagonale upisuju se koeficijenti s padajućim indeksima, a ispod koeficijenti s rastućim indeksima. Na mjestu gdje indksi postanu veći od n ili manji od 0 pišu se nule.

Da bi sustav automatskog upravljanja s karakterističnom jednadžbom (7.8) bio stabilan prema Hurwitzovom kriteriju stabilnosti, nužno je i dovoljno da sve glavne subdeterminante [15] Hurwitzove determinante Δ_n budu pozitivne uz uvjet da su i svi koeficijenti karakteristične jednadžbe veći od nule ($a_i > 0$).

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} H_1 & \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdot & \cdot & 0 \end{vmatrix} \\ H_2 & \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \\ H_3 & \begin{vmatrix} \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_3 & a_1 & 0 \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots \\ H_{n-1} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \\ H_n & \end{vmatrix} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= a_{n-1}, H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \dots \\ H_{n-1} &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_3 & a_1 \end{vmatrix}, H_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Hurwitzove subdeterminante označene su u izrazu (7.10), a njih nekoliko izdvojeno je u izrazu (7.11). Pokušajmo sada odrediti uvjete stabilnosti za sustave prvog, drugog i trećeg člana s općim koeficijentima. Karakteristična jednadžba prvog reda glasi:

$$1 + G_o(s) = a_1 s + a_0 = 0. \quad (7.12)$$

Svi koeficijenti moraju biti veći od nule i sve subdeterminante Hurwitzove determinante moraju biti veće od nule:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \Delta_1 = a_0 \Rightarrow H_1 = |a_0| = a_0 > 0 \quad (7.13)$$

Karakteristična jednadžba drugog reda glasi:

$$1 + G_o(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0. \quad (7.14)$$

Svi koeficijenti moraju biti veći od nule i sve subdeterminante Hurwitzove determinante moraju biti veće od nule:

$$\begin{aligned} a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} \\ H_1 = |a_1| = a_1 > 0, H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Karakteristična jednadžba trećeg reda glasi:

$$1 + G_o(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0. \quad (7.16)$$

Svi koeficijenti moraju biti veći od nule i sve subdeterminante Hurwitzove determinante moraju biti veće od nule:

$$\begin{aligned} a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \\ H_1 = |a_2| = a_2 > 0, H_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0 \\ H_3 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 a_1 a_0 - a_3 a_0^2 = a_0 H_2 > 0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Neka je prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{3s + 1}{s^2 + 3s + 2}. \quad (7.18)$$

Potrebno je odrediti stabilnost zatvorenog kruga automatskog upravljanja (jedinična povratna veza). Karakteristična jednadžba sustava glasi:

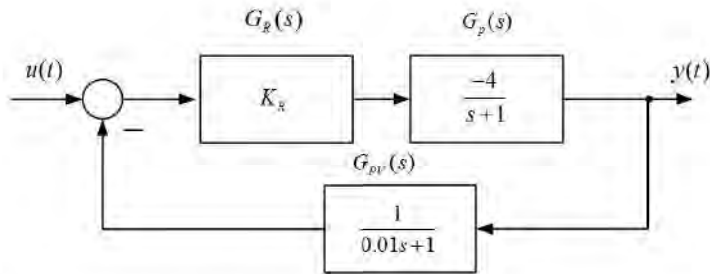
$$\begin{aligned} 1 + G_o(s) &= 1 + \frac{3s + 1}{s^2 + 3s + 2} = 0 / (s^2 + 3s + 2) \\ s^2 + 3s + 2 + 3s + 1 &= 0 \Rightarrow s^2 + 6s + 3 = 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Primjenom Hurwitzovog kriterija stabilnosti:

$$\begin{aligned} a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0 &\Rightarrow 3 > 0, 6 > 0, 1 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow H_1 = |6| = 6 > 0 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 > 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

zaključujemo da je zatvoreni krug automatskog upravljanja stabilan jer su svi koeficijenti karakteristične jednadžbe (7.20) pozitivni i sve subdeterminante Hurwitzove

determinante pozitivne. Često se u sustavu automatskog upravljanja koriste najjednostavniji proporcionalni regulatori (o regulatorima nešto kasnije). Hurwitzovim kriterijem stabilnosti moguće je odrediti vrijednost proporcionalnog pojačanja K_R za koju će sustav biti stabilan. Primjer jednog zatvorenog regulacijskog kruga prikazan je na slici 7.5.



Slika 7.5: Sustav automatskog upravljanja - stabilnost u ovisnosti o pojačanju K_R

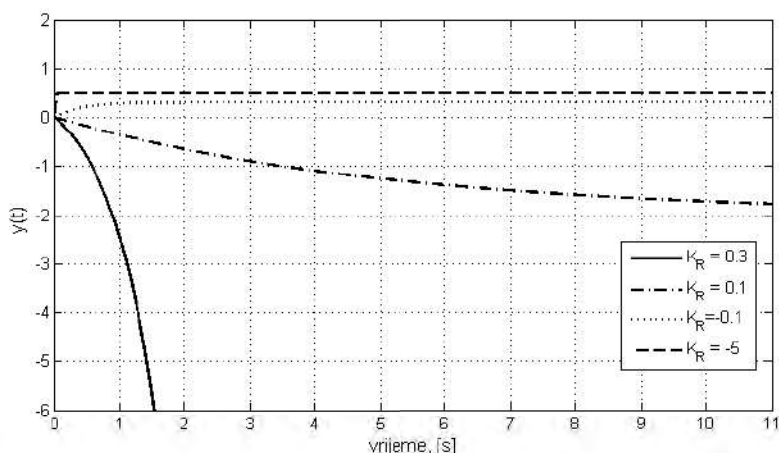
Koristeći relaciju za zatvoreni krug automatskog upravljanja povratnom vezom (4.15) možemo doći do karakteristične jednadžbe sustava sa slike 7.5.

$$\begin{aligned}
 G_o(s) &= G_R(s)G_P(s) = \frac{-4K_R}{s+1}, G_{PV}(s) = \frac{1}{0.01s+1} \\
 1 + G_{PV}(s)G_o(s) &= 1 + \frac{1}{0.01s+1} \frac{-4K_R}{s+1} = 0/(0.01s+1)(s+1) \quad (7.21) \\
 0.01s^2 + 1.01s + 1 - 4K_R &= 0.
 \end{aligned}$$

Iskoristimo sada Hurwitzov kriterij stabilnosti za određivanje parametra proporcionalnog regulatora:

$$\begin{aligned}
 a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0 &\Rightarrow 0.01 > 0, 1.01 > 1 - 4K_R > 0 \Rightarrow K_R < 0.25 \\
 \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1.01 & 0 \\ 0.01 & 1 - 4K_R \end{vmatrix} &\Rightarrow H_1 = |1.01| = 1.01 > 0, \quad (7.22) \\
 H_2 = \begin{vmatrix} 1.01 & 0 \\ 0.01 & 1 - 4K_R \end{vmatrix} &= 1.01(1 - 4K_R) > 0 \Rightarrow 1 - 4K_R > 0 \Rightarrow K_R < 0.25.
 \end{aligned}$$

Iz oba uvjeta proizlazi da pojačanje proporcionalnog regulatora mora biti $K_R < 0.25$.



Slika 7.6: Odziv sustava automatskog upravljanja u ovisnosti o pojačanju K_R

Na slici 7.6 prikazan je odziv sustava na jediničnu skokovitu pobudu za nekoliko vrijednosti pojačanja K_R . Ako je $K_R > 0.25$, odziv sustava je nestabilan (slika 7.6 za $K_R = 0.3$). Hurwitzov kriterij stabilnosti primjenjiv je za sustave do trećeg reda, a za sustave četvrtog i višeg reda komplicira se izračun subdeterminanti Hurwitzove determinante. Za određivanje stabilnosti sustava potrebno je znati prijenosnu funkciju koja opisuje sustav, što često nije moguće.

7.1.2 Routhov kriterij stabilnosti

Nedostatak proračuna subdeterminanti u Hurwitzovom kriteriju stabilnosti riješio je engleski matematičar Edward John Routh. On je predložio metodu za ispitivanje stabilnosti sustava koja je vrlo slična Hurwitzovoj metodi, ali s pojednostavljenim proračunom. Routhov kriterij stabilnosti primjenjiv je za sustave višeg reda ($n \geq 3$) i provodi se u dva koraka [16]:

1. Potrebno je provjeriti da li su koeficijenti karakteristične jednadžbe svi istog predznaka i da li neki od koeficijenata nedostaje. U slučaju da su koeficijenti različitog predznaka ili nedostaje neki koeficijent a_i , sustav je nestabilan i nije potrebno provjeravati 2. korak. Ako su svi koeficijenti istog predznaka i ako postoje svi koeficijenti a_i , tada je karakteristična jednadžba kandidat za 2. korak Routhovog kriterija stabilnosti.
2. U ovom koraku kreira se Routhova tablica. Koeficijenti karakteristične jednadžbe

najprije se razvrstaju u dva retka. Routhova tablica ima $n + 1$ redaka:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & a_{n-8} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & a_{n-9} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\
 s^2 & w_1 & w_2 & & & & & & & \\
 s^1 & x_1 & & & & & & & & \\
 s^0 & y_1 & & & & & & & &
 \end{array} \quad (7.23)$$

Iz Routhove tablice (7.23) vidimo način kreiranja tablice. Prvi je stupac zapravo pomoćni stupac koji nam pomaže u kreiranju tablice, a sastoji se od svih $n + 1$ potencija od s , gdje n predstavlja red sustava. Dakle, u prvi stupac odozgo prema dolje popunjavaju se redom potencije $s^n, s^{n-1}, s^{n-2}, \dots, s^2, s^1, s^0$. U prvi redak upisuje se, s lijeva na desno, svaki drugi koeficijent karakteristične jednadžbe počevši od koeficijenta uz najvišu potenciju od s u karakterističnoj jednadžbi ($a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \dots$). U drugi redak upisuju se, s lijeva na desno, svaki drugi koeficijent karakteristične jednadžbe počevši od koeficijenta a_{n-1} . Ispod prva dva retka upisuju se koeficijenti b_1, b_2, b_3, \dots koji se izračunavaju prema sljedećem pravilu:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \\
 b_2 &= \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots
 \end{aligned} \quad (7.24)$$

Koeficijenti c_1, c_2, c_3, \dots izračunavaju se prema sljedećem pravilu:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{a_{n-3}b_1 - a_{n-1}b_2}{b_1} \\
 c_2 &= \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{a_{n-5}b_1 - a_{n-1}b_3}{b_1}, \dots
 \end{aligned} \quad (7.25)$$

Koeficijenti se dalje izračunavaju prema istoj shemi pa tako se zadnji koeficijent u tablici y_1 izračunava kao:

$$y_1 = \frac{- \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ x_1 & 0 \end{vmatrix}}{x_1} = \frac{w_2 x_1}{x_1} = w_2. \quad (7.26)$$

Sustav će dakle biti stabilan (imat će negativne realne dijelove polova) ako su svi koeficijenti u prvom stupcu Routhove tablice istog predznaka. Broj nestabilnih polova jednak je broju promjena predznaka koeficijenata u prvom stupcu Routhove tablice.

Dana je prijenosna funkcija zatvorenog kruga automatskog upravljanja:

$$G(s) = \frac{2s + 5}{s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1}. \quad (7.27)$$

Karakteristična jednadžba sustava je:

$$s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0. \quad (7.28)$$

Napravimo najprije 1. korak Routhovog kriterija, odnosno provjerimo da li su svi predznaci karakteristične jednadžbe (7.28) istog predznaka i postoje li svi koeficijenti. Karakteristična jednadžba zadovoljava 1. korak Routhovog kriterija pa stoga možemo započeti kreirati Routhovu tablicu. Najprije postavimo pomoćni stupac sa svim potencijama od s :

$$\begin{array}{c|c} s^4 & \\ s^3 & \\ s^2 & \\ s^1 & \\ s^0 & \end{array} \quad . \quad (7.29)$$

Sada je potrebno popuniti prva dva retka Routhove tablice koeficijentima karakteristične jednadžbe (7.28):

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & 3 & 1 & 0 \\ s^2 & b_1 & b_2 & 0 \\ s^1 & c_1 & 0 & 0 \\ s^0 & d_1 & 0 & 0 \end{array} . \quad (7.30)$$

Koristeći pravila (7.24) izračunajmo koeficijente b_1, b_2 :

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-(1-6)}{3} = \frac{5}{3}, b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-(-3)}{3} = 1. \quad (7.31)$$

Routhova tablica zasad izgleda ovako:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & 3 & 1 & 0 \\ s^2 & \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ s^1 & c_1 & 0 & 0 \\ s^0 & d_1 & 0 & 0 \end{array} . \quad (7.32)$$

Koristeći pravila (7.25) izračunajmo koeficijent c_1 :

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 \end{vmatrix}}{\frac{5}{3}} = -\frac{(3 - \frac{5}{3})}{\frac{5}{3}} = -\frac{4}{5}. \quad (7.33)$$

U tablici se pojavljuje koeficijent c_1 s različitim predznakom od svih koeficijenata u prvom stupcu što upućuje na nestabilnost sustava:

$$\begin{array}{c} s^4 \\ s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (7.34)$$

S obzirom da broj promjena predznaka određuje broj polova u desnoj s - poluravnini izračunajmo zadnji koeficijent d_1 da vidimo koliko imamo nestabilnih polova:

$$d_1 = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{5}{3} & 1 \\ -\frac{4}{5} & 0 \end{vmatrix}}{-\frac{4}{5}} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{4}{5}} = 1. \quad (7.35)$$

Routhova tablica za sustav s karakterističnom jednadžbom (7.28) ima sljedeći oblik:

$$\begin{array}{c} s^4 \\ s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (7.36)$$

Zadnji je član u Routhovoj tablici (7.36) pozitivan što znači da su se dogodile dvije promjene predznaka koeficijenata u prvom stupcu Routhove tablice. Broj promjena predznaka u prvom stupcu Routhove tablice odgovara broju nestabilnih polova (polova u desnoj s poluravnini). Korištenjem računskih alata dobiveni su sljedeći polovi za sustav (7.27):

$$\begin{aligned} s_{p1} &= -1 \\ s_{p2} &= -2.2056 \\ s_{p3} &= 0.1028 + j0.6655 \\ s_{p4} &= 0.1028 - j0.6655 \end{aligned} \quad (7.37)$$

što upućuje na dva konjugirano kompleksna pola koji se nalaze u desnoj s poluravnini. Prema tome, sustav je nestabilan.

Dana je karakteristična jednadžba sustava s promjenjivim parametrom K_R :

$$0.01s^3 + 1.01s^2 + s + 1 - 4K_R = 0. \quad (7.38)$$

Napravimo najprije 1. korak Routhovog kriterija, odnosno provjerimo da li su svi predznaci karakteristične jednadžbe (7.38) istog predznaka i postoje li svi koeficijenti. Navedeni uvjeti vrijedit će samo ako je:

$$1 - 4K_R > 0 \Rightarrow K_R < 0.25. \quad (7.39)$$

Ako vrijedi (7.39), zadovoljen je 1. korak Routhovog kriterija te možemo započeti kreirati Routhovu tablicu. Najprije postavimo pomoćni stupac sa svim potencijama od s :

$$\begin{array}{c|c} s^3 & \\ s^2 & \\ s^1 & \\ s^0 & \end{array} \quad . \quad (7.40)$$

a zatim popunimo prva dva retka Routhove tablice koeficijentima karakteristične jednadžbe:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 0.01 & 1 \\ s^2 & 1.01 & 1 - 4K_R \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array} . \quad (7.41)$$

Izračunajmo sada koeficijent b_1 :

$$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 0.01 & 1 \\ 1.01 & 1 - 4K_R \end{vmatrix}}{1.01} = \frac{1.01 - 0.01 + 0.04K_R}{1.01} = \frac{1 + 0.04K_R}{1.01}. \quad (7.42)$$

Kako se predznak koeficijenta b_1 ne bi promijenio, koeficijent b_1 mora biti strogo pozitivan:

$$\frac{1 + 0.04K_R}{1.01} > 0 \Rightarrow K_R > -25. \quad (7.43)$$

Iz izraza (7.43) dobiven je još jedan uvjet za koeficijent K_R . Routhova tablica sada ima oblik (7.44):

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 0.01 & 1 \\ s^2 & 1.01 & 1 - 4K_R \\ s^1 & \frac{1+0.04K_R}{1.01} & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array} . \quad (7.44)$$

Izračunajmo još koeficijent c_1 :

$$c_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 1.01 & 1 - 4K_R \\ \frac{1+0.04K_R}{1.01} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{1+0.04K_R}{1.01}} = \frac{\frac{1+0.04K_R}{1.01}(1 - 4K_R)}{\frac{1+0.04K_R}{1.01}} = 1 - 4K_R. \quad (7.45)$$

Routhova tablica za sustav opisan karakterističnom jednadžbom (7.38) ima oblik (7.46):

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 0.01 & 1 \\ s^2 & 1.01 & 1 - 4K_R \\ s^1 & \frac{1+0.04K_R}{1.01} & 0 \\ s^0 & 1 - 4K_R & 0 \end{array} . \quad (7.46)$$

Kako ni zadnji član prvog stupca Routhove tablice ne bi promijenio predznak, mora vrijediti:

$$1 - 4K_R > 0 \Rightarrow K_R < 0.25. \quad (7.47)$$

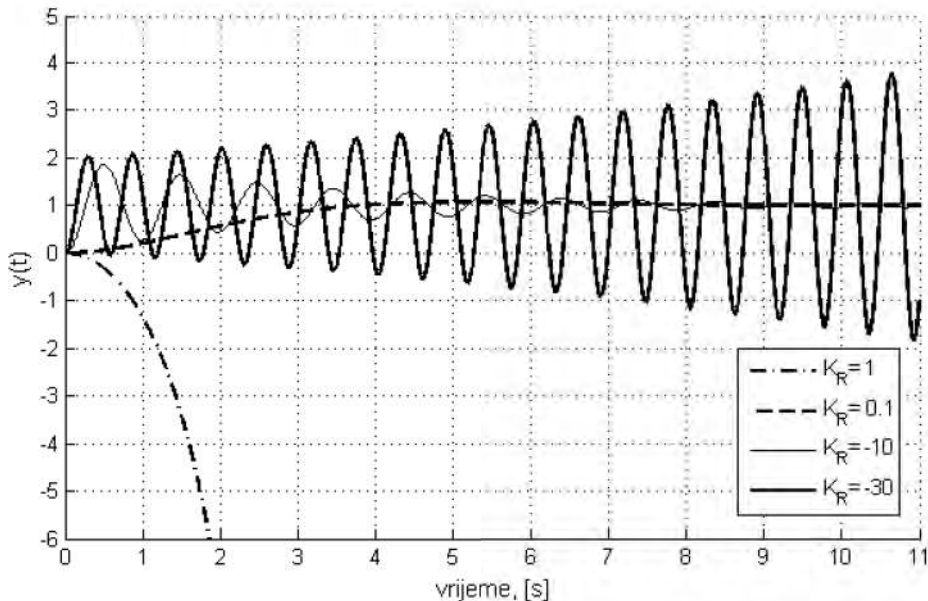
Ako napravimo presjek sva tri uvjeta koja smo dobili ((7.39), (7.43) i (7.47)) dobije se da koeficijent K_R mora biti:

$$K_R < 0.25 \cap K_R > -25 \cap K_R < 0.25 \Rightarrow K_R \in \langle -25, 0.25 \rangle. \quad (7.48)$$

Ako pretpostavimo da je karakteristična jednadžba (7.38) nazivnik prijenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{1 - 4K_R}{0.01s^3 + 1.01s^2 + s + 1 - 4K_R}, \quad (7.49)$$

možemo dobiti odziv sustava na jediničnu skokovitu pobudu za različite vrijednosti koeficijenta K_R (slika 7.6). Sa slike 7.6 očigledno je da je sustav nestabilan za vrijednosti koeficijenta K_R koje nisu unutar intervala $\langle -25, 0.25 \rangle$.



Slika 7.7: Odziv prijenosne funkcije (7.49) u ovisnosti o pojačanju K_R

Routhov kriterij prihvatljiv je za sustave višeg reda što mu je i prednost nad Hurwitzovim kriterijem stabilnosti. Također, omogućuje pregled broja nestabilnih polova sustava. Nedostatak mu je taj što moramo znati prijenosnu funkciju sustava ili diferencijalnu jednadžbu sustava.

7.2 Frekvencijski kriteriji stabilnosti

Algebarski kriteriji stabilnosti mogu se primijeniti na sustave čija je diferencijalna jednadžba poznata, odnosno ako poznamo prijenosnu funkciju sustava. Često to nije moguće pa su algebarske metode stabilnosti neupotrebljive u svrhu određivanja stabilnosti sustava. Za sustave kod kojih ne poznamo diferencijalnu jednadžbu (prijenosnu funkciju) koja opisuje dinamiku sustava koristit ćemo frekvencijske kriterije stabilnosti. Kod frekvencijske analize nekog sustava snima se pojačanje sustava i fazni pomak sustava za razne frekvencije. Od frekvencijskih kriterija, obradit ćemo dva kriterija:

1. Nyquistov kriterij stabilnosti
2. Određivanje stabilnosti pomoću Bodeovog dijagrama

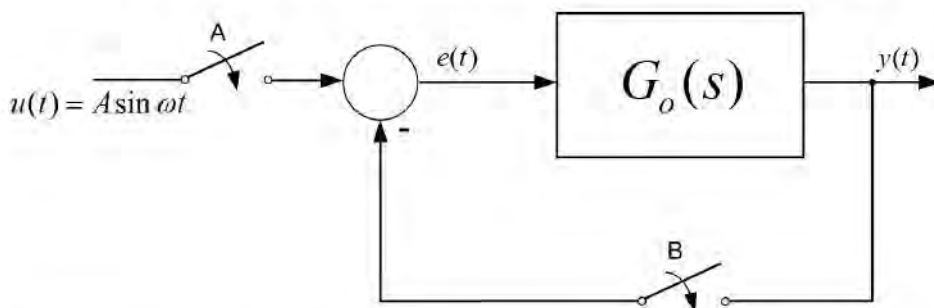
Određivanje stabilnosti pomoću Bodeovog dijagrama zapravo je prezentacija Nyquistovog kriterija stabilnosti u Bodeovom dijagramu.

7.2.1 Nyquistov kriterij stabilnosti

Nyquistov kriterij [2], [10], [8] stabilnosti polazi od otvorenog kruga sustava automatskog upravljanja. Nyquistov dijagram u polarnom obliku definiran je izrazom:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg(G(j\omega))}. \quad (7.50)$$

Za raspon svih frekvencija, Nyquistov dijagram poprima vrijednosti koje su definirane točkom koja je od ishodišta udaljena za $|G(j\omega)|$ pod kutom od $\arg(G(j\omega))$.



Slika 7.8: Nadomjesna shema za određivanje stabilnosti sustava Nyquistovim kriterijem

Na slici 7.8 prikazana je nadomjesna shema [10] za određivanje stabilnosti sustava Nyquistovim kriterijem. U početku, neka je uključena sklopka A na slici 7.8, a isključena sklopka B, što znači da nema povratne veze. Na sustav dovedemo harmoničku pobudu oblika:

$$e(t) = u(t) = A \sin \omega t. \quad (7.51)$$

U poglavlju o frekvencijskom odzivu osnovnih dinamičkih članova spomenuli smo da nakon prijelaznih pojava u sustavu, izlaz sustava $G_o(s)$, ako na njega djeluje harmonička pobuda, poprima oblik:

$$y(t) = |G_o(j\omega)| A \sin(\omega t + \arg(G_o(j\omega))), \quad (7.52)$$

gdje je $|G_o(j\omega)|$ pojačanje sustava na frekvenciji ω , a $\arg(G_o(j\omega))$ fazni pomak na frekvenciji ω . Frekvenciju na kojoj argument ima vrijednost $-\pi$ ($\arg(G_o(j\omega_\pi)) = -\pi$), nazovimo ω_π frekvencijom. Ako u izraz (7.52) uvrstimo $\arg(G_o(j\omega_\pi)) = -\pi$, dobit ćemo:

$$y(t) = |G_o(j\omega_\pi)| A \sin(\omega_\pi t - \pi) = -|G_o(j\omega_\pi)| A \sin(\omega_\pi t). \quad (7.53)$$

Pretpostavimo da je na frekvenciji ω_π iznos pojačanja sustava jedan ($|G_o(j\omega_\pi)| = 1$). Izlazni signal sada poprima oblik:

$$y(t) = -A \sin(\omega_\pi t). \quad (7.54)$$

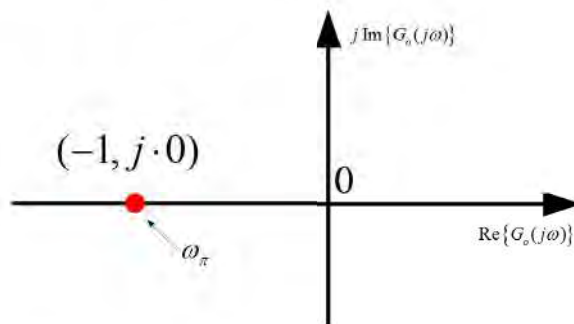
Kada bismo u istom trenutku isključili sklopku A, a uključili sklopku B, sustav bi se jednako ponašao i titrao bi vlastitim oscilacijama. Prethodni zaključak vrijedi, jer kad isključimo sklopku A, a uključimo sklopku B, ulaz u sustav je:

$$e(t) = 0 - y(t) = A \sin(\omega_\pi t). \quad (7.55)$$

Ako usporedimo izraz (7.51) i (7.55) uočavamo jednakost signala. U ovom slučaju sustav je na rubu stabilnosti. U slučaju da je pojačanje sustava na frekvenciji ω_π manje od jedan ($|G_o(j\omega_\pi)| < 1$), odziv sustava bi prigušenim oscilacijama težio nuli, odnosno sustav je stabilan. Ako je pojačanje sustava na frekvenciji ω_π veće od jedan ($|G_o(j\omega_\pi)| > 1$), odziv sustava bi se raspirivao, amplituda signala teži u beskonačno i sustav je tada nestabilan. Ako u relaciju (7.50) uvrstimo sve poznate parametre na frekvenciji ω_π i pretpostavimo da je sustav na rubu stabilnosti u Nyquistovom dijagramu, dobit ćemo:

$$G(j\omega_\pi) = |G(j\omega_\pi)| e^{j \arg(G(j\omega_\pi))} = 1 \cdot e^{-j\pi} = 1 \cdot (\cos(-\pi) + j \sin(-\pi)) = -1 + j \cdot 0. \quad (7.56)$$

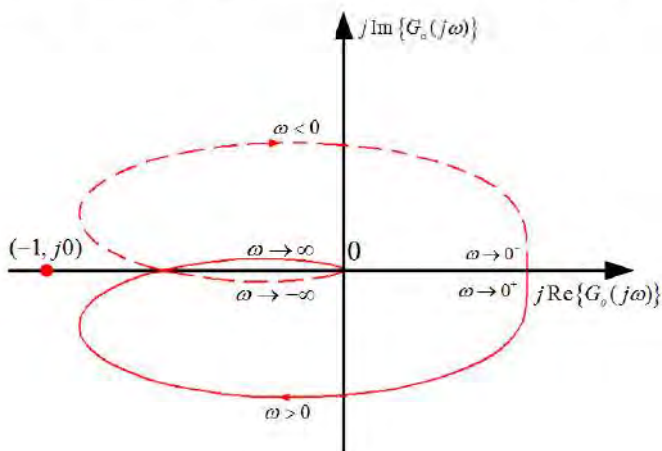
Kompleksna točka $(-1, j0)$ u Gaussovoj ravnini (Nyquistov dijagram) zapisana izrazom (7.56) naziva se kritičnom točkom (slika 7.9).



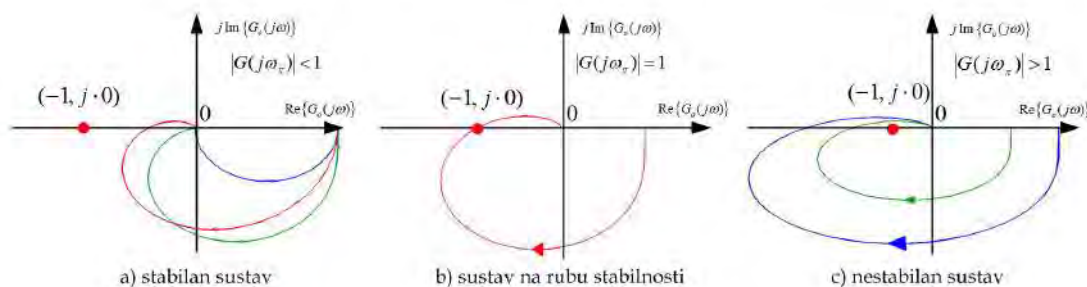
Slika 7.9: Nyquistov dijagram - kritična točka

Navedimo Nyquistov kriterij stabilnosti. Zatvoreni sustav automatskog upravljanja (slika 7.8) (zatvoren povratnom vezom) biti će stabilan ako potpuni Nyquistov dijagram otvorenog kruga $G_o(s)$ zaobilazi kritičnu točku $(-1, j0)$ s desne strane, odnosno ako ne okružuje kritičnu točku s lijeve strane.

Potpuni Nyquistov dijagram prikazuje frekvencijsku karakteristiku za raspon frekvencija $-\infty < \omega < \infty$. Do sada smo crtali frekvencijsku karakteristiku samo za pozitivne frekvencije. Ako želimo dobiti Nyquistov dijagram za raspon frekvencija $-\infty < \omega < \infty$ potrebno je napraviti zrcalnu sliku frekvencijske karakteristike za pozitivne frekvencije s obzirom na realnu os. Potpuni Nyquistov dijagram prikazan je na slici 7.10



Slika 7.10: Potpuni Nyquistov dijagram stabilnog sustava



Slika 7.11: Nyquistov dijagram: a) stabilan sustav, b) sustav na rubu stabilnosti, c) nestabilan sustav

Prema Nyquistovom kriteriju stabilnosti na slici 7.11 a) prikazan je stabilan sustav jer krivulja Nyquistovog dijagrama zaobilazi kritičnu točku $(-1, j0)$ s desne točke. U ovom slučaju vrijedi $|G_o(j\omega_\pi)| < 1$. Ako Nyquistova krivulja prolazi kroz kritičnu točku $(-1, j0)$ tada je sustav na rubu stabilnosti (slika 7.11b)). U ovom slučaju vrijedi $|G_o(j\omega_\pi)| = 1$. U zadnjem slučaju (slika 7.11c)) sustav je nestabilan jer Nyquistova krivulja zaobilazi

kritičnu točku $(-1, j0)$ s lijeve strane. U ovom slučaju vrijedi $|G_o(j\omega_\pi)| > 1$. Za ovako jednostavne slučajeve nije potrebno crtati potpuni Nyquistov dijagram jer je jasno da zrcalna slika ne zaobilazi kritičnu točku $(-1, j0)$ s lijeve strane. Da bismo u sustavu odredili gdje Nyquistova krivulja siječe realnu os Gaussove ravnine, potrebno je najprije odrediti frekvenciju ω_π . Prijenosnu funkciju u frekvencijskoj domeni $G(j\omega)$ možemo zapisati kao:

$$G(j\omega) = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}. \quad (7.57)$$

Kandidate za frekvenciju ω_π dobit ćemo tako da imaginarni dio prijenosne funkcije u frekvencijskoj domeni $G(j\omega)$ izjednačimo s nulom:

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega_\pi)\} = 0 \Rightarrow \omega_\pi. \quad (7.58)$$

Ovo je intuitivno jasno jer krivulja da bi sjekla realnu os mora imati imaginarni dio jednak nuli. Od izračunatih kandidata za ω_π , za Nyquistov kriterij stabilnosti koristimo samo one za koje vrijedi da je $\arg(G(j\omega_\pi)) = -\pi$, odnosno one čiji je realni dio negativan ($\operatorname{Re}\{G(j\omega_\pi)\} < 0$). Izračunata frekvencija ω_π uvrsti se u realni dio ($\operatorname{Re}\{G(j\omega_\pi)\}$) te se dobije točka u kojoj Nyquistova krivulja siječe realnu os. Ako je broj $\operatorname{Re}\{G(j\omega_\pi)\} > -1$ sustav je stabilan. U slučaju da je $\operatorname{Re}\{G(j\omega_\pi)\} = -1$ sustav je na rubu stabilnosti. Konačno, ako je $\operatorname{Re}\{G(j\omega_\pi)\} < -1$ sustav je nestabilan. Navedeni su slučajevi ekvivalentni onima koji su opisani slikom 7.11. Bitno je naglasiti da Nyquistov kriterij vrijedi za sustave s jediničnom povratnom vezom. Ako u povratnoj vezi postoji blok (prijenosna funkcija), tada je sustav potrebno svesti na jediničnu povratnu vezu. Pokušajmo sada za sustav koji ima prijenosnu funkciju otvorenog kruga $G_o(s)$:

$$G_o(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}. \quad (7.59)$$

odrediti stabilnost Nyquistovim kriterijem stabilnosti. Najprije u prijenosnu funkciju otvorenog kruga (7.59) uvrstimo supstituciju $s = j\omega$:

$$G_o(j\omega) = \frac{1}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 1}. \quad (7.60)$$

Nakon toga, izraz (7.60) zapišemo u obliku $G_o(j\omega) = \operatorname{Re}\{G_o(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G_o(j\omega)\}$:

$$\begin{aligned} G_o(j\omega) &= \frac{1}{1 - 3\omega^2 + j(2\omega - \omega^3)} \frac{1 - 3\omega^2 - j(2\omega - \omega^3)}{1 - 3\omega^2 - j(2\omega - \omega^3)} \\ G_o(j\omega) &= \frac{1 - 3\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2} - j \frac{2\omega - \omega^3}{(1 - 3\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2}. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Da bismo dobili kandidate za frekvenciju ω_π , potrebno je imaginarni dio izraza (7.61) izjednačiti s nulom:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{G_o(j\omega)\} &= -\frac{2\omega - \omega^3}{(1 - 3\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2} = 0 / \cdot - \left((1 - 3\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2 \right) \\ 2\omega - \omega^3 &= 0 \Rightarrow \omega^3 - 2\omega = 0 \Rightarrow \omega(\omega^2 - 2) = 0 \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$\omega_1 = 0s^{-1}$$

$$\omega_{2,3}^2 - 2 = 0 \Rightarrow \omega_{2,3} = \pm\sqrt{2}s^{-1}.$$

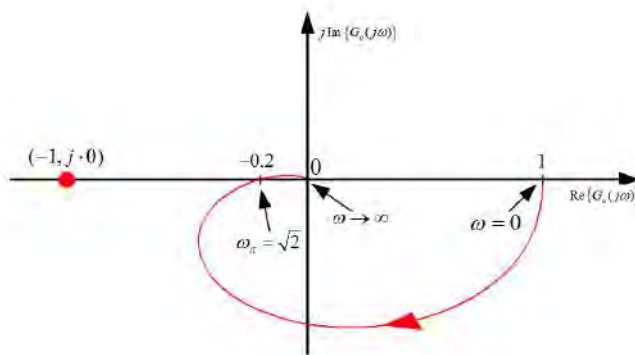
Razmatrat ćemo samo pozitivne frekvencije tako da imamo dva kandidata za frekvenciju ω_π , $\omega_1 = 0s^{-1}$ i $\omega_2 = \sqrt{2}s^{-1}$. Ako u realni dio izraza (7.61) uvrstimo $\omega_1 = 0s^{-1}$ dobijemo:

$$\operatorname{Re}\{G_o(j\omega)\} = \frac{1 - 3\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2} \Big|_{\omega=0s^{-1}} = 1. \quad (7.63)$$

S obzirom da smo dobili pozitivan broj kao rezultat uvrštavanja $\omega_1 = 0s^{-1}$ u realni dio izraza (7.61), $\omega_1 = 0s^{-1}$ se ne koristi u Nyquistovom kriteriju jer ne vrijedi da je $\arg(G(j\omega_1)) = \pi$. Preostaje nam drugi kandidat $\omega_2 = \sqrt{2}s^{-1}$. Uvrstimo i njega u realni dio izraza (7.61):

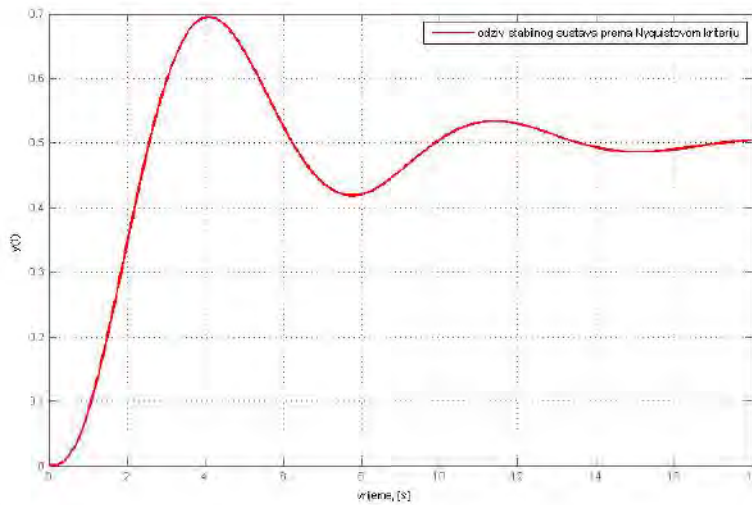
$$\operatorname{Re}\{G_o(j\omega)\} = \frac{1 - 3\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2} \Big|_{\omega=\sqrt{2}s^{-1}} = \frac{1 - 3 \cdot 2}{(1 - 3 \cdot 2)^2 + 0} = -\frac{1}{5} = -0.2. \quad (7.64)$$

Za ovu frekvenciju vrijedi da je $\arg(G(j\omega_2)) = -\pi$ te je tako frekvencija $\omega_\pi = \sqrt{2}s^{-1}$. Realni dio $\operatorname{Re}\{G_o(j\omega_\pi)\}$ jednak je -0.2 što znači da vrijedi $\operatorname{Re}\{G_o(j\omega_\pi)\} > -1$. Slijedi zaključak da je sustav stabilan. Nyquistov dijagram sustava (7.64) prikazan je na slici 7.12.



Slika 7.12: Nyquistov dijagram sustava (7.59)

Odziv zatvorenog sustava s jediničnom povratnom vezom koji ima prijenosnu funkciju zatvorenog kruga (7.59) prikazan je na slici 7.13.



Slika 7.13: Odziv sustava s jediničnom povratnom vezom i prijenosnom funkcijom otvorenog kruga (7.59)

Prijenosna funkcija zatvorenog sustava automatskog upravljanja je:

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 2s^2 + 2s + K} \quad (7.65)$$

Potrebno je odrediti raspon koeficijenta $K > 0$ za koji će sustav biti stabilan. Ono što moramo uočiti je to da se Nyquistov kriterij primjenjuje na prijenosnu funkciju otvorenog kruga $G_o(s)$. Nama je u izrazu (7.65) dana prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga. Sustav za koji se primjenjuje Nyquistov dijagram mora biti sveden na jediničnu povratnu vezu prema izrazu (4.17). Koristeći izraz (4.17) za zatvoreni regulacijski krug možemo izvesti izraz za prijenosnu funkciju otvorenog kruga $G_o(s)$. To znači da možemo odrediti funkciju otvorenog kruga ako znamo funkciju zatvorenog kruga automatskog upravljanja. Prema izrazu (4.17) slijedi:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} / \cdot (1 + G_o(s)) \Rightarrow G(s) (1 + G_o(s)) = G_o(s) \Rightarrow \\ G(s) &= G_o(s) - G_o(s)G(s) \Rightarrow G(s) = G_o(s)(1 - G(s)) \Rightarrow \\ G_o(s) &= \frac{G(s)}{1 - G(s)}. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Primijenimo sada izraz (7.66) na prijenosnu funkciju zatvorenog kruga (7.65):

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{G(s)}{1 - G(s)} = \frac{\frac{K}{s^3 + 2s^2 + 2s + K}}{1 - \frac{K}{s^3 + 2s^2 + 2s + K}} = \frac{\frac{K}{s^3 + 2s^2 + 2s + K}}{\frac{s^3 + 2s^2 + 2s + K - K}{s^3 + 2s^2 + 2s + K}} \\ G_o(s) &= \frac{K}{s^3 + 2s^2 + 2s}. \end{aligned} \quad (7.67)$$

U prijenosnu funkciju otvorenog kruga (7.67) uvrstimo supstituciju $s = j\omega$:

$$G_o(j\omega) = \frac{K}{-j\omega^3 - 2\omega^2 + j2\omega}. \quad (7.68)$$

Napišimo sada izraz (7.68) u obliku $G_o(j\omega) = \operatorname{Re}\{G_o(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G_o(j\omega)\}$:

$$\begin{aligned} G_o(j\omega) &= \frac{K}{-2\omega^2 + j(2\omega - \omega^3)} \frac{-2\omega^2 - j(2\omega - \omega^3)}{-2\omega^2 - j(2\omega - \omega^3)} \\ G_o(j\omega) &= \frac{-2K\omega^2}{4\omega^4 + (2\omega - \omega^3)^2} - j \frac{K(2\omega - \omega^3)}{4\omega^4 + (2\omega - \omega^3)^2} \\ G_o(j\omega) &= \frac{-2K\omega^2}{\omega^2(4\omega^2 + (2 - \omega^2)^2)} - j \frac{K(2\omega - \omega^3)}{\omega^2(4\omega^2 + (2 - \omega^2)^2)} \\ G_o(j\omega) &= \frac{-2K}{4\omega^2 + (2 - \omega^2)^2} - j \frac{K(2 - \omega^2)}{\omega(4\omega^2 + (2 - \omega^2)^2)} \end{aligned} \quad (7.69)$$

Da bismo dobili kandidate za frekvenciju ω_π potrebno je imaginarni dio izraza (7.69) izjednačiti s nulom:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{G_o(j\omega)\} &= -\frac{K(2 - \omega^2)}{\omega(4\omega^2 + (2 - \omega^2)^2)} = 0 / \cdot -\omega(4\omega^2 + (2 - \omega^2)^2) \\ 2 - \omega^2 &= 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 - 2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm\sqrt{2}s^{-1}. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Razmatrat ćemo samo pozitivne frekvencije tako da imamo jednog kandidata za frekvenciju ω_π , $\omega_1 = \omega_\pi = \sqrt{2}s^{-1}$. Uvrstimo $\omega_1 = \sqrt{2}s^{-1}$ u realni dio izraza (7.69):

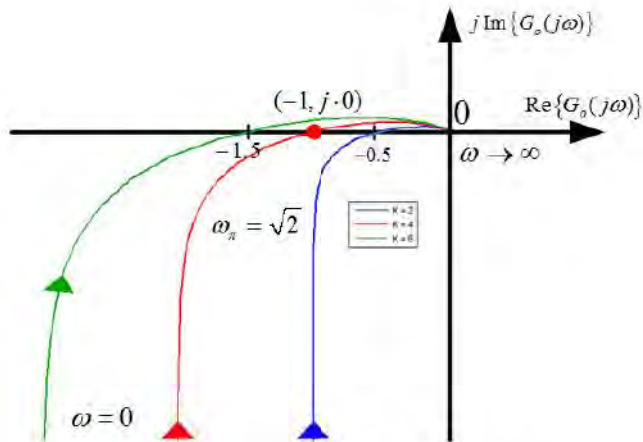
$$\operatorname{Re}\{G_o(j\omega)\} = \frac{-2K}{4\omega^2 + (2 - \omega^2)^2} \Big|_{\omega_\pi = \sqrt{2}s^{-1}} = \frac{-2K}{4 \cdot 2} = -\frac{K}{4} = -0.25K. \quad (7.71)$$

Na frekvenciji ω_π mora vrijediti da je $\operatorname{Re}\{G(j\omega_\pi)\} > -1$:

$$\frac{-K}{4} > -1 \Rightarrow -K > -4 \Rightarrow K < 4. \quad (7.72)$$

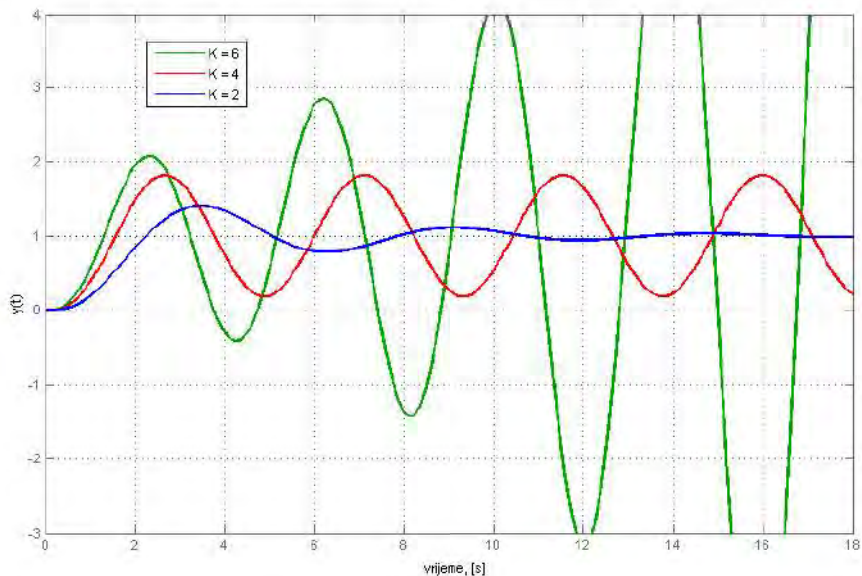
U uvjetu zadatka naveli smo da je $K > 0$. Na temelju svega navedenog, sustav će biti stabilan ako vrijedi:

$$K \in \langle 0, 4 \rangle. \quad (7.73)$$



Slika 7.14: Nyquistov dijagram sustava (7.67)

Odziv zatvorenog sustava s jediničnom povratnom vezom koji ima prijenosnu funkciju zatvorenog kruga (7.65) prikazan je na slici 7.14.



Slika 7.15: Odziv sustava s jediničnom povratnom vezom i prijenosnom funkcijom otvorenog kruga (7.65)

Na slikama 7.14 i 7.15 prikazani su Nyquistovi dijagrami i prijelazne funkcije sustava (7.65) za pojedine vrijednosti pojačanja K . Kada Nyquistova krivulja prolazi desno od kritične točke $(-1, j0)$ sustav je stabilan što se vidi i na odzivu sa slike 7.15 za $K = 2$. Ako Nyquistova krivulja prolazi kroz kritičnu točku $(-1, j0)$, sustav je na rubu stabilnosti što

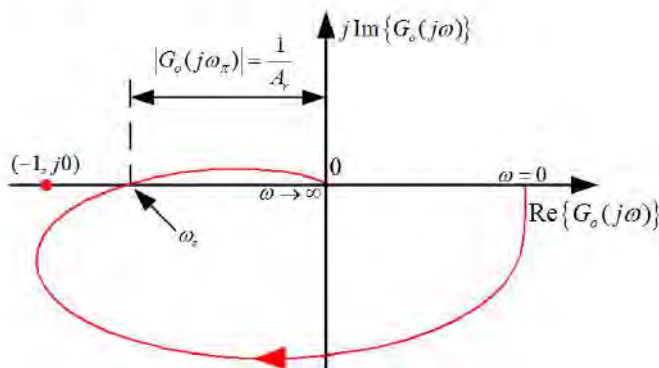
se vidi i na odzivu sa slike 7.15 za $K = 4$. Konačno, ako Nyquistova krivulja prolazi lijevo od kritične točke $(-1, j0)$, sustav je nestabilan, a odziv sustava raspirujući prema slici 7.15 za $K = 6$. Nyquistov kriterij stabilnosti ne govori nam samo o tome da li je sustav stabilan ili nestabilan ili je možda na rubu stabilnosti, već daje informaciju i o rezervi stabilnosti. Rezerva stabilnosti zapravo govori koliko smo daleko od kritične točke na frekvenciji ω_π ili koliko smo daleko od faznog pomaka π za vrijednost $G_o(j\omega) = -1$. Kada govorimo o rezervi stabilnosti, onda postoje dvije rezerve/ dva osiguranja [17]:

- Amplitudno osiguranje
- Fazno osiguranje .

Amplitudno osiguranje je pojačanje koje je potrebno dodati u sustav da bi Nyquistova krivulja na frekvenciji $\omega_\pi = -\pi$ prolazila kroz kritičnu točku $(-1, j0)$. Matematički gledano, amplitudno osiguranje definiramo kao:

$$A_r = \frac{1}{|G_o(j\omega_\pi)|}. \quad (7.74)$$

Amplitudno osiguranje prikazano je na slici 7.16.



Slika 7.16: Amplitudno osiguranje

Fazno osiguranje definira se kao fazni kut između negativnog dijela realne osi i točke Nyquistove krivulje koja po apsolutnom iznosu ima jedinično pojačanje. To je kut koji je potreban da Nyquistova krivulja dosegne kritičnu točku $(-1, j0)$. Matematički, fazno osiguranje definiramo kao:

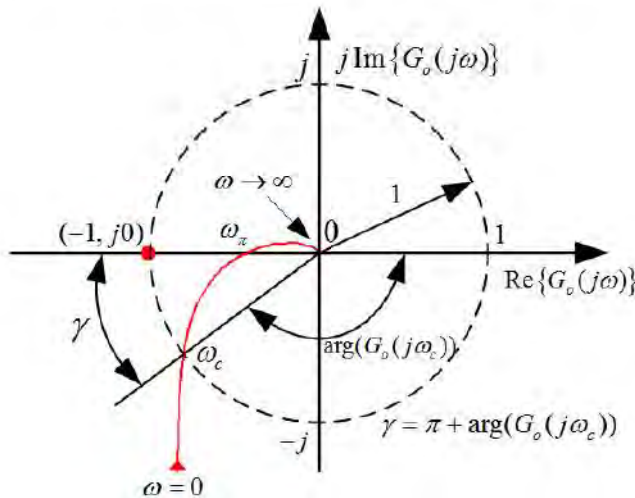
$$\begin{aligned} |G_o(j\omega_c)| &= 1 \\ \gamma &= \pi + \arg(G_o(j\omega_c)) \\ \gamma [^\circ] &= 180 + \arg(G_o(j\omega_c)) [^\circ]. \end{aligned} \quad (7.75)$$

U izrazu (7.75) pojavljuje se tzv. presječna frekvencija ω_c koja se definira kao frekvencija na kojoj frekvencijska prijenosna funkcija $G_o(j\omega)$ ima jedinično pojačanje (po apsolutnoj

vrijednosti). Nalazi se na mjestu gdje Nyquistova krivulja siječe jediničnu kružnicu. Presječna frekvencija slijedi iz uvjeta:

$$\omega_c \Rightarrow |G_o(j\omega_c)| = 1. \quad (7.76)$$

Fazno osiguranje i presječna frekvencija prikazani su na slici 7.17.



Slika 7.17: Fazno osiguranje

Pokušajmo sada za prijenosnu funkciju otvorenog kruga $G_o(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s}. \quad (7.77)$$

odrediti amplitudno i fazno osiguranje. Potrebno je odrediti frekvencije ω_π i ω_c . U prijenosnu funkciju otvorenog kruga (7.77) uvrstimo supstituciju $s = j\omega$:

$$G_o(j\omega) = \frac{1}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega}. \quad (7.78)$$

Napišimo sada izraz (7.78) u obliku $G_o(j\omega) = \text{Re}\{G_o(j\omega)\} + j \text{Im}\{G_o(j\omega)\}$:

$$\begin{aligned} G_o(j\omega) &= \frac{1}{-3\omega^2 + j(3\omega - \omega^3)} \cdot \frac{-3\omega^2 - j(3\omega - \omega^3)}{-3\omega^2 - j(3\omega - \omega^3)} \\ G_o(j\omega) &= \frac{-3\omega^2}{9\omega^4 + (3\omega - \omega^3)^2} - j \frac{3\omega - \omega^3}{9\omega^4 + (3\omega - \omega^3)^2} \\ G_o(j\omega) &= \frac{-3\omega^2}{\omega^2(9\omega^2 + (3 - \omega^2)^2)} - j \frac{\omega(3 - \omega^2)}{\omega^2(9\omega^2 + (3 - \omega^2)^2)} \\ G_o(j\omega) &= \frac{-3}{9\omega^2 + (3 - \omega^2)^2} - j \frac{3 - \omega^2}{\omega(9\omega^2 + (3 - \omega^2)^2)}. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Da bismo dobili kandidate za frekvenciju ω_π potrebno je imaginarni dio izraza (7.79) izjednačiti s nulom:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{G_o(j\omega)\} &= -j \frac{3 - \omega^2}{\omega(9\omega^2 + (3 - \omega^2)^2)} = 0 / \cdot \omega(9\omega^2 + (3 - \omega^2)^2) \\ 3 - \omega^2 &= 0 \Rightarrow \omega^2 - 3 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm\sqrt{3}s^{-1}. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Razmatrat ćemo samo pozitivne frekvencije tako da imamo samo jednog kandidata za frekvenciju ω_π , $\omega_1 = \sqrt{3}s^{-1}$. Uvrstimo $\omega_1 = \sqrt{3}s^{-1}$ u realni dio izraza (7.79):

$$\operatorname{Re}\{G_o(j\omega)\} = \frac{-3}{9\omega^2 + (3 - \omega^2)^2} \Big|_{\omega=\sqrt{3}s^{-1}} = -\frac{1}{9}. \quad (7.81)$$

Za frekvenciju $\omega_1 = \sqrt{3}s^{-1}$ vrijedi da je $\arg(G(j\omega_1)) = -\pi$ te je tako frekvencija $\omega_\pi = \sqrt{3}s^{-1}$. Realni dio $\operatorname{Re}\{G_o(j\omega_\pi)\}$ jednak je $-1/9$ što znači da vrijedi $\operatorname{Re}\{G_o(j\omega_\pi)\} > -1$. Slijedi zaključak da je sustav stabilan. Postavlja se pitanje s kojom je rezervom sustav stabilan. Na frekvenciji ω_π vrijedi:

$$G_o(j\omega_\pi) = \operatorname{Re}\{G_o(j\omega_\pi)\} \quad (7.82)$$

jer je imaginarni dio od $G_o(j\omega)$ jednak nuli. Primjenimo li izraz (7.74) na rezultat izraza (7.81), dobit ćemo amplitudno osiguranje:

$$A_r = \frac{1}{|G_o(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{|\operatorname{Re}\{G_o(j\omega_\pi)\}|} = \frac{1}{|-1/9|} = 9. \quad (7.83)$$

Dobili smo da je amplitudno osiguranje jednako 9 što znači da se u proces otvorenog kruga $G_o(s)$ može unijeti dodatno pojačanje, a da sustav i dalje ostane stabilan. To dodatno pojačanje mora biti manje od 9. Ako je jednako 9, sustav je na rubu stabilnosti. Da bismo odredili presječnu frekvenciju, potrebno je odrediti gdje Nyquistova krivulja siječe jediničnu kružnicu (izraz (7.76)):

$$|G_o(j\omega_c)| = \frac{1}{|-3\omega_c^2 + j(3\omega_c - \omega_c^3)|} = \frac{1}{\sqrt{9\omega_c^4 + (3\omega_c - \omega_c^3)^2}} = 1. \quad (7.84)$$

Matematički gledano, ovaj je problem složen jer je potrebno riješiti jednadžbu (7.84):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{9\omega_c^4 + (3\omega_c - \omega_c^3)^2}} &= 1/2 \Rightarrow \frac{1}{9\omega_c^4 + (3\omega_c - \omega_c^3)^2} = 1/ \cdot (9\omega_c^4 + (3\omega_c - \omega_c^3)^2) \Rightarrow \\ 9\omega_c^4 + (3\omega_c - \omega_c^3)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (7.85)$$

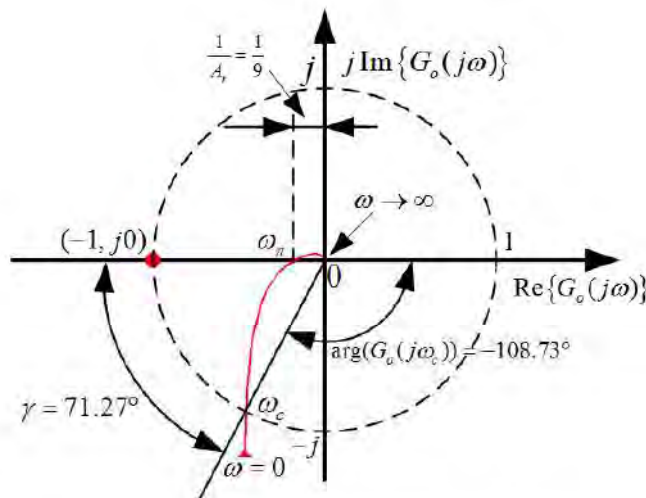
Koristeći numeričke metode rješavanja jednadžbi ili napredne alate za izračunavanje nultočaka funkcije, dobit ćemo da je presječna frekvencija ω_c jednaka:

$$9\omega_c^4 + (3\omega_c - \omega_c^3)^2 = 1 \Rightarrow \omega_c = 0.327s^{-1}. \quad (7.86)$$

Na presječnoj frekvenciji potrebno je odrediti fazno osiguranje prema izrazu (7.75):

$$\begin{aligned}\gamma &= \pi + \arg(G_o(j\omega_c)) = \pi + \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{G_o(j\omega_c)\}}{\operatorname{Re}\{G_o(j\omega_c)\}}\right) \\ \gamma &= \pi + \arctan\left(\frac{-\frac{3\omega_c - \omega_c^3}{9\omega_c^4 + (3\omega_c - \omega_c^3)^2}}{\frac{-3\omega_c^2}{9\omega_c^4 + (3\omega_c - \omega_c^3)^2}}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{\omega_c^2 - 3}{-3\omega_c}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{-2.893}{-0.981}\right) \\ \gamma &= \pi - 1.898 = 1.244 = 71.27^\circ.\end{aligned}\tag{7.87}$$

Amplitudno i fazno osiguranje sustava (7.77) prikazano je na slici 7.18.



Slika 7.18: Amplitudno i fazno osiguranje sustava (7.77)

Fazno osiguranje često je bolja mjera za rezervu stabilnosti i usko je vezano za nadvišenje prijelazne funkcije te tako utječe na kvalitetu odziva. Vezu između faznog osiguranja i nadvišenja prijelazne funkcije opisat ćemo u poglavlju *Sinteza regulacijskog kruga sustava automatskog upravljanja*.

7.2.2 Određivanje stabilnosti pomoću Bodeovog dijagrama

Amplitudno i fazno osiguranje lakše je reprezentirati pomoću amplitudno frekvencijskih i fazno frekvencijskih karakteristika, odnosno Bodeovim dijagramom. Bodeov dijagram češće se koristi u praksi od Nyquistovog dijagrama zbog jednostavnije konstrukcije samog dijagrama. Amplitudno i fazno osiguranje također ćemo prenijeti iz Nyquistovog dijagrama u Bodeov dijagram na vrlo jednostavan način. Amplitudno fazna karakteristika definira se kao $20 \log |G_o(j\omega)|$. Ako tu definiciju primijenimo i na amplitudno osiguranje A_r (izraz (7.74)), dobit ćemo amplitudno osiguranje s prikazom u Bodeovom dijagramu:

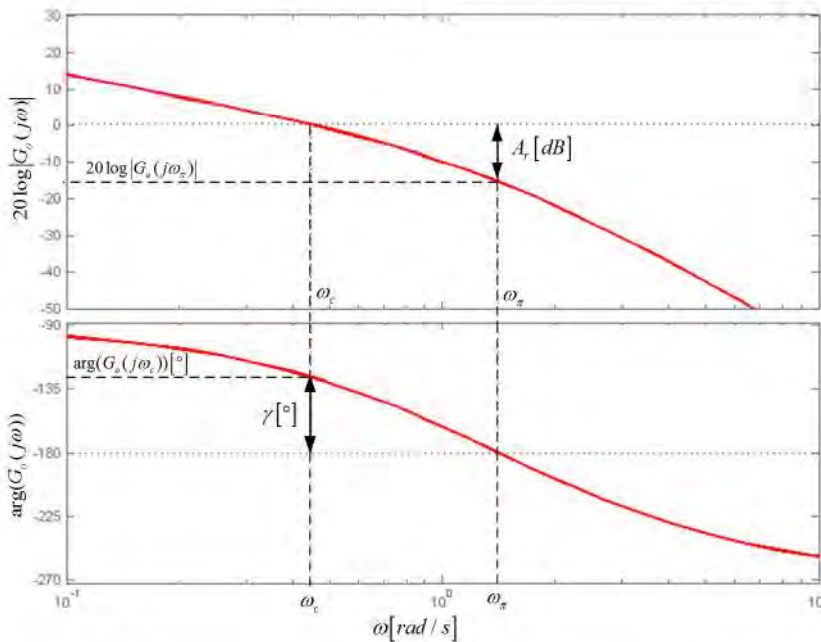
$$A_r [dB] = 20 \log A_r = 20 \log \frac{1}{|G_o(j\omega_\pi)|} = -20 \log |G_o(j\omega_\pi)|. \quad (7.88)$$

Za frekvenciju ω_π vrijedi da je fazni pomak sustava -180° što u fazno frekvencijskom dijagramu predstavlja također -180° . Na presječnoj frekvenciji ω_c vrijedi da je $|G_o(j\omega_c)| = 1$. Ako to želimo preslikati u amplitudno frekvencijsku karakteristiku, onda vrijedi:

$$20 \log |G_o(j\omega_c)| = 20 \log 1 = 0. \quad (7.89)$$

Iz izraza (7.89) slijedi da se frekvencija ω_c definira presjecištem amplitudno frekvencijske karakteristike s frekvencijskom osi. Kada odredimo frekvenciju ω_c u fazno frekvencijskom dijagramu, odredimo fazni pomak sustava na frekvenciji ω_c . Fazno osiguranje definirano je razlikom od faznog pomaka sustava na frekvenciji ω_c do -180° :

$$\begin{aligned} \gamma &= \pi + \arg(G_o(j\omega_c)) \\ \gamma [^\circ] &= 180 + \arg(G_o(j\omega_c)) [^\circ]. \end{aligned} \quad (7.90)$$



Slika 7.19: Amplitudno i fazno osiguranje sustava (Bodeov dijagram)

Amplitudno i fazno osiguranje u prikazu Bodeovog dijagrama prikazani su na slici 7.19. Da bi sustav bio stabilan, amplitudno osiguranje mora biti pozitivno te fazno osiguranje mora biti pozitivno:

$$\begin{aligned} A_r [dB] &> 0 \\ \gamma [^\circ] &> 0. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Relacija kojom su zadovoljena oba uvjeta u izrazu (7.91) je:

$$\omega_c < \omega_\pi. \quad (7.92)$$

Ako je presječna frekvencija $\omega_c < \omega_\pi$ na kojoj je fazni pomak sustava -180° , sustav će biti stabilan. Ako su frekvencija $\omega_c = \omega_\pi$ jednake, sustav je na rubu stabilnosti, a ako je $\omega_c > \omega_\pi$, sustav je nestabilan. Pokušajmo sada Bodeovim dijagramom odrediti stabilnost sustava (fazno i amplitudno osiguranje) zatvorenog regulacijskog kruga s prijenosnom funkcijom otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{10}{s^3 + 11s^2 + 10s} = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}. \quad (7.93)$$

U prijenosnu funkciju otvorenog kruga (7.93) uvrstimo supstituciju $s = j\omega$:

$$G_o(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+10)} = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\frac{\omega}{10}+1)}. \quad (7.94)$$

Amplitudno frekvencijska karakteristika sustava (7.94) je:

$$\begin{aligned} 20 \log |G_o(j\omega)| &= 20 \log \left| \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\frac{\omega}{10}+1)} \right| = 20 \log \left(\frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2+1} \sqrt{(\frac{\omega}{10})^2+1}} \right) \\ 20 \log |G_o(j\omega)| &= -20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\omega^2+1} - 20 \log \sqrt{(\frac{\omega}{10})^2+1}. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Presječnu frekvenciju moguće je odrediti na temelju izraza (7.95) na dva načina. Jedan je grafički, a drugi analitički. Grafičkim putem dobije se približno rješenje što je ponekad sasvim dovoljno. Napredni alati poput Matlaba *SIMULINK* omogućuju na jednostavan način određivanje presječne frekvencije, amplitudnog i faznog osiguranja (nešto više o tome u poglavlju 9 PRILOZI). Ako želimo analitičkim putem izračunati presječnu frekvenciju, koristimo izraz (7.89):

$$\begin{aligned} 20 \log |G_o(j\omega_c)| &= 20 \log \left(\frac{1}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2+1} \sqrt{(\frac{\omega_c}{10})^2+1}} \right) = 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2+1} \sqrt{(\frac{\omega_c}{10})^2+1}} &= 1/2 \Rightarrow \frac{1}{\omega_c^2(\omega_c^2+1) \left((\frac{\omega_c}{10})^2+1 \right)} = 1 \Rightarrow \\ \omega_c^2(\omega_c^2+1) \left((\frac{\omega_c}{10})^2+1 \right) &= 1. \end{aligned} \quad (7.96)$$

Matematički proračun presječne frekvencije ponovno je složen, stoga je potrebno koristiti numeričke metode ili napredne matematičke metode. Primjenom numeričkih metoda dobit ćemo presječnu frekvenciju ω_c :

$$\omega_c^2(\omega_c^2+1) \left((\frac{\omega_c}{10})^2+1 \right) = 1 \Rightarrow \omega_c = 0.784s^{-1}. \quad (7.97)$$

Fazno osiguranje možemo dobiti pomoću izrazu (7.90), ali najprije treba odrediti fazno frekvencijsku karakteristiku sustava (7.94):

$$G_o(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(j\frac{\omega}{10} + 1)} = \frac{1}{-\frac{11}{10}\omega^2 + j(\omega - \frac{\omega^3}{10})}$$

$$\arg(G_o(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega - \frac{\omega^3}{10}}{-\frac{11}{10}\omega^2}\right) = -\arctan\left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{10}}{-\frac{11}{10}\omega}\right). \quad (7.98)$$

Uvrstimo sada u izraz (7.90) presječnu frekvenciju ω_c :

$$\gamma = \pi + \arg(G_o(j\omega_c)) = \pi - \arctan\left(\frac{1 - \frac{\omega_c^2}{10}}{-\frac{11}{10}\omega_c}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{0.9385}{-0.8624}\right) \quad (7.99)$$

$$\gamma = \pi - 2.3139 = 0.8276 = 47.42^\circ.$$

Nakon što smo odredili fazno osiguranje, potrebno je još odrediti i amplitudno osiguranje. Za amplitudno osiguranje potrebna nam je frekvencija ω_π . Nju ćemo lako odrediti iz uvjeta da je na toj frekvenciji fazno osiguranje jednako nuli:

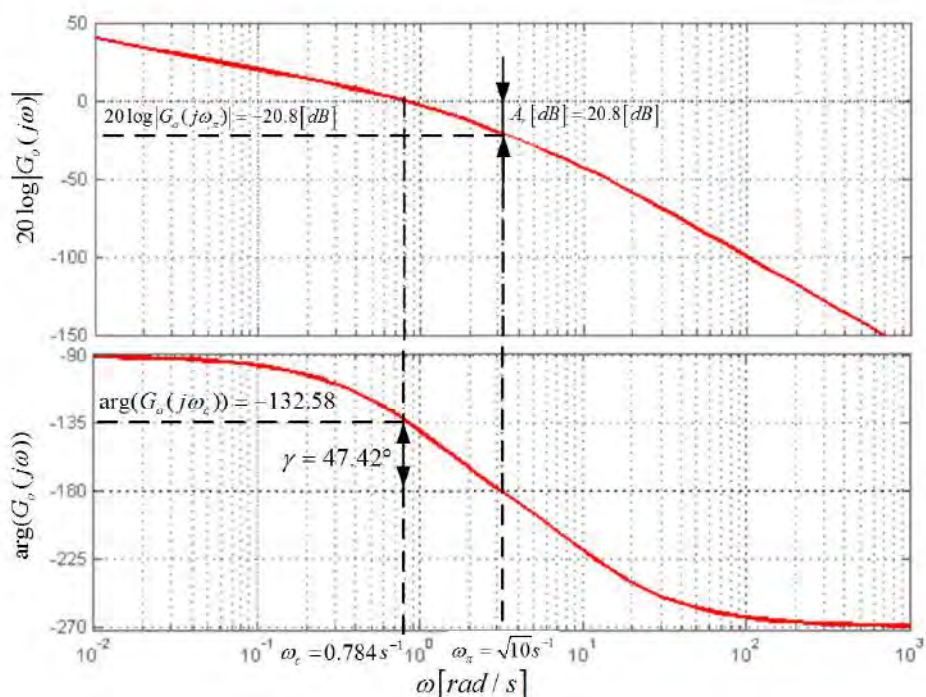
$$\gamma = \pi + \arg(G_o(j\omega_\pi)) = \pi - \arctan\left(\frac{1 - \frac{\omega_\pi^2}{10}}{-\frac{11}{10}\omega_\pi}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\arctan\left(\frac{1 - \frac{\omega_\pi^2}{10}}{-\frac{11}{10}\omega_\pi}\right) = \pi \Rightarrow \left(\frac{1 - \frac{\omega_\pi^2}{10}}{-\frac{11}{10}\omega_\pi}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\omega_\pi^2}{10} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_{\pi 1,2} = \pm\sqrt{10}s^{-1}. \quad (7.100)$$

Ako zanemarimo negativne frekvencije, onda je frekvencija $\omega_\pi = \sqrt{10}s^{-1}$. Sada je tu frekvenciju potrebno uvrstiti u izraz (7.88) te se dobije amplitudno osiguranje:

$$A_r [dB] = -20 \log |G_o(j\omega_\pi)| = 20 \log \left(\frac{1}{\omega_\pi \sqrt{\omega_\pi^2 + 1} \sqrt{(\frac{\omega_\pi}{10})^2 + 1}} \right) = 20.8 [dB]. \quad (7.101)$$



Slika 7.20: Amplitudno i fazno osiguranje sustava (7.93)(Bodeov dijagram)

Amplitudno i fazno osiguranje sustava (7.93) u Bodeovom dijagramu prikazan je na slici (7.20). Ovime ćemo završiti poglavlje o stabilnosti sustava automatskog upravljanja. U sljedećem poglavlju posvetit ćemo se sintezi regulacijskog kruga.

Poglavlje 8

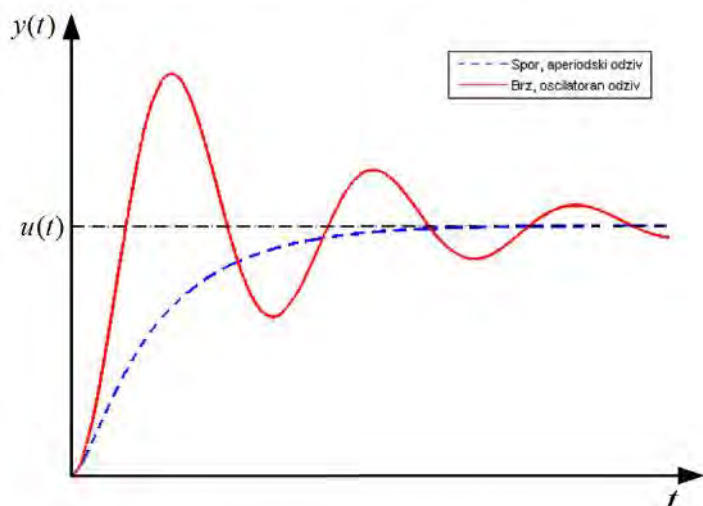
Sinteza regulacijskog kruga sustava automatskog upravljanja

Najvažniji je zadatak regulacije stabilno ponašanje sustava automatskog upravljanja. Osim stabilnosti bitno je zadovoljiti i neke druge zahtjeve na sustav upravljanja kao što su:

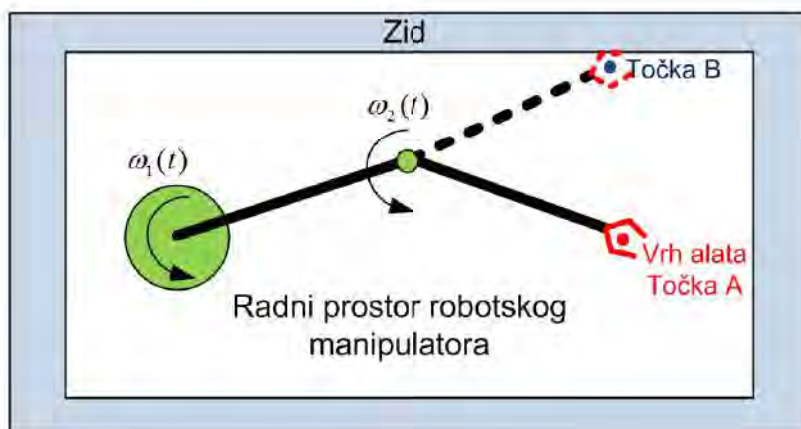
- Osiguranje točnosti slijeđenja vodeće (referentne) veličine
- Osiguranje eliminacije utjecaja poremećajne veličine u sustavu

U mnogim sustavima potrebno je zadovoljiti oba uvjeta što je teško izvedivo uobičajenim metodama upravljanja. Regulacijski sustav potrebno je projektirati tako da je njegov odziv na referentnu veličinu što brži, uz minimalne oscilacije i bez odstupanja regulirane veličine. Svi su ovi uvjeti spregnuti jer brzina odziva povlači za sobom velike oscilacije i malo regulacijsko odstupanje. Mala brzina odziva često unosi trajna regulacijska odstupanja (slika 8.1).

Kod slijednih sustava (sustavi praćenja, slijeđenja pozicije) oscilatorno ponašanje nije uvijek poželjno. Na slici 8.2 prikazan je robotski manipulator u radnom prostoru. Zadatak je robotskog manipulatora da se iz točke A pozicionira u točku B promjenom samo kutne brzine $\omega_2(t)$. Točka B nalazi se na rubu radnog prostora (uza zid). Ako je regulacijski sustav parametriran tako da slijeđenje pozicije ima prigušeno oscilatorno ponašanje, robotski manipulator udarit će u zid zbog nadvišenja u odzivu. Ako je odziv slijednog sustava aperiodski, izbjeći ćemo udar u zid. Sprečavanjem udaranja robotskog manipulatora u zid, smanjili smo brzinu sustavu. Ovo je samo jedan od primjera gdje prigušeno oscilatorno ponašanje nije poželjno.



Slika 8.1: Vremenski odziv slijednoog sustava



Slika 8.2: Robotski manipulator u radnom prostoru

8.1 Zahtjevi sinteze sustava automatskog upravljanja

Kada govorimo o zahtjevima sinteze na sustav automatskog upravljanja, tada postoje tri osnovna zahtjeva [9], [10], [18]:

- Zahtjevi u vremenskom području
- Zahtjevi u frekvencijskom području
- Zahtjevi na pogrešku slijeđenja (kriteriji optimalnosti)

Bilo koji od ovih kriterija mora osigurati:

- Stabilno ponašanje sustava
- Zadovoljavajuću brzinu odziva
- Dopuštenu pogrešku u stacionatnom stanju

Za potrebe sinteze sustava automatskog upravljanja, sustave višeg reda opisivat ćemo sustavom 2. reda s dominantnom dinamikom što znači da ćemo uzeti u obzir dinamiku samo dvaju najbližih polova imaginarnoj osi. Većina dinamičkih sustava može se vjerno opisati upravo sustavom 2. reda.

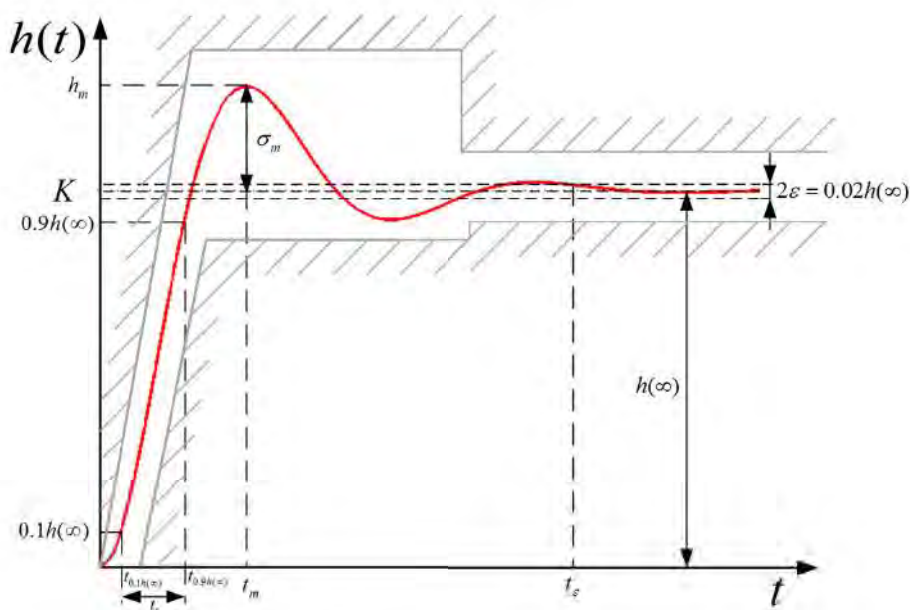
8.1.1 Zahtjevi u vremenskom području

Zahtjevi na regulacijski krug u vremenskom području očituju se pokazateljima kvalitete koji su već definirani u poglavlju *Vremenski odziv osnovnih dinamičkih članova*. Sustave višeg reda predstavljat ćemo kao sustave 2. reda s dva dominantna konjugirano kompleksna pola (ili realna pola) i prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8.1)$$

gdje su:

- ζ - faktor prigušenja;
- ω_n - vlastita (prirodna) frekvencija sustava [rad/s].



Slika 8.3: Zahtjevi u vremenskom području

Ako je faktor prigušenja $\zeta \geq 1$, tada prijenosna funkcija (8.1) ima realne polove te prema tome aperiodski odziv. Za faktor prigušenja $0 < \zeta < 1$ prijenosna funkcija (8.1) ima konjugirano kompleksne polove te prema tome prigušeno oscilatorni odziv. Pokazatelji kvalitete, u idealnom bi se slučaju trebali nalaziti u okvirima sa slike 8.3. Iako smo u poglavlju *Vremenski odziv osnovnih dinamičkih članova* već naveli pokazatelje kvalitete prijelazne funkcije, ovdje ćemo ponovo navesti iste. Vrijeme porasta t_r (slika 8.3) definirano je kao vrijeme potrebno da prijelazna funkcija $h(t)$ poraste od 10% do 90% svoje konačne vrijednosti $h(\infty)$. Ovo vrijeme mjera je brzine sustava. Vrijeme prvog maksimuma t_m je vrijeme u kojem prijelazna funkcija ima globalni maksimum (slika 8.3) i mjera je za brzinu odziva:

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (8.2)$$

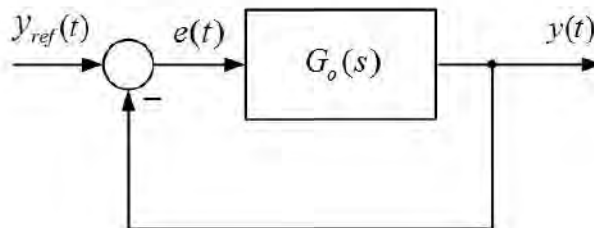
Nadvišenje prijelazne funkcije σ_m (slika 8.3) definira se u postotcima kao prebačaj iznad stacionarne vrijednosti prijelazne funkcije. Nadvišenje je mjera za rezervu stabilnost sustava i pokazatelj je prigušenja oscilacija. Ovisi samo o faktoru prigušenja ζ :

$$\sigma_m [\%] = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} 100\%. \quad (8.3)$$

Vrijeme ustaljivanja vrijeme je potrebno da prijelazna funkcija uđe u područje $\pm\epsilon$ (slika 8.3). Područje je najčešće $\pm 5\%$, $\pm 2\%$ i $\pm 1\%$. S obzirom na prijelaznu funkciju sustava (8.3), vrijeme ustaljivanja može se približno izračunati pomoću ovojnice prijelazne funkcije ($e^{-\pi\zeta t_e} = \epsilon/100\%$):

$$t_{5\%} \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}, t_{2\%} \approx \frac{3.9}{\zeta\omega_n}, t_{1\%} \approx \frac{4.6}{\zeta\omega_n}. \quad (8.4)$$

Vrijeme ustaljivanja mjera je brzine odziva sustava. Da bi se sustavom automatskog upravljanja ostvarila točnost, regulacijska pogreška sustava $e(t)$ mora biti jednaka nuli ili mora biti što manja. Na slici 8.4 prikazan je sustav zatvorenog kruga upravljanja.



Slika 8.4: Zatvoreni krug upravljanja (regulacijska pogreška)

Regulacijsku pogrešku $e(t)$ u Laplaceovoj domeni možemo prikazati sljedećim izrazom:

$$E(s) = Y_{ref}(s) - Y(s) \quad (8.5)$$

gdje je izlaz iz sustava:

$$Y(s) = G_o(s)E(s). \quad (8.6)$$

Uvrštenjem (8.6) u (8.5) i sređivanjem, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} E(s) &= U(s) - G_o(s)E(s) \Rightarrow E(s)(1 + G_o(s)) = Y_{ref}(s) \Rightarrow \\ E(s) &= \frac{1}{1 + G_o(s)} Y_{ref}(s). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Ako zatvorni krug upravljanja ima oblik prijenosne funkcije (8.1), potrebno je odrediti prijenosnu funkciju otvorenog kruga $G_o(s)$:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \Rightarrow G_o(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)} \\ G_o(s) &= \frac{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}{1 - \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Ako izraz za prijenosnu funkciju (8.8) uvrstimo u (8.7) dobit ćemo:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s}} Y_{ref}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} Y_{ref}(s). \quad (8.9)$$

Pomoću teorema konačne vrijednosti može se odrediti stacionarna pogreška:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} Y_{ref}(s). \quad (8.10)$$

Pogreška u stacionarnom stanju ovisit će o pobudi $Y_{ref}(s)$. Za područje automatskog upravljanja zanimljive su pobude tipa jedinične skokovite pobude i pobude tipa rampe. Za skokovitu pobudu vrijedi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = 0 \quad (8.11)$$

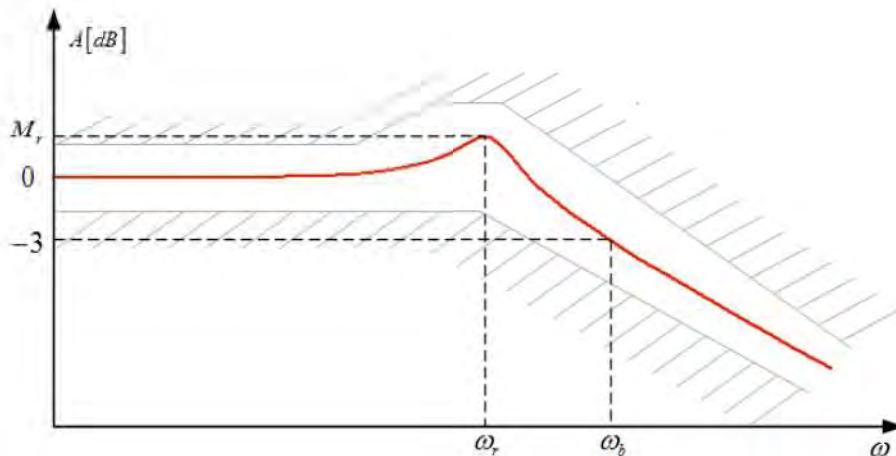
iz čega zaključujemo da za skokovitu pobudu nema greške u stacionarnom stanju. Za pobudu tipa rampa vrijedi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s^2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{2\zeta}{\omega_n} \quad (8.12)$$

što znači da za zadanu vrijednost faktora prigušenja ζ postoji trajno regulacijsko odstupanje. Svi navedeni zahtjevi u vremenskoj domeni usko su povezani s frekvencijskim pokazateljima kvalitete, odnosno sa zahtjevima u frekvencijskom području. Parametriranje regulatora prema zahtjevima u vremenskom području bazira se na namještanju parametara regulatora kako bi se ostvarila željena prijelazna funkcija sustava ili ostvarilo željeno ponašanje sustava na pobudu tipa rampe i sl.

8.1.2 Zahtjevi u frekvencijskom području

Frekvencijska analiza sustava često se koristi u upravljanju sustavima zbog jednostavnog snimanja frekvencijske karakteristike sustava. Pokušajmo sada opisati osnovne zahtjeve u frekvencijskom području [2]. I u slučaju frekvencijske analize sustava, sustave višeg reda predstaviti ćemo sustavom 2. reda s dva dominantna konjugirano kompleksna pola (ili realna pola).



Slika 8.5: Zahtjevi u frekvencijskom području (zatvoreni krug upravljanja)

Na slici 8.5 prikazana je amplitudno frekvencijska karakteristika zatvorenog kruga upravljanja. Sustavi koji nemaju pogrešku u stacionarnom stanju imaju pojačanje na niskim frekvencijama jednako 0 dB.

Širinu frekvencijskog pojasa ω_b definirat ćemo kao frekvenciju na kojoj pojačanje sustava padne za 3 dB, odnosno frekvenciju na kojoj sustav ima za $\sqrt{2}$ puta manje pojačanje od pojačanja sustava na frekvenciji nula. Širina pojasa ω_b povezana je s vremenom porasta t_r , i to približnom relacijom za sustave s nadvišenjem od oko 20 %:

$$\omega_b \approx 2\pi \frac{0.45}{t_r}. \quad (8.13)$$

U poglavlju o frekvencijskom odzivu osnovnih dinamičkih članova spomenuli smo rezonantnu frekvenciju i rezonantno izdizanje. Rezonantna frekvencija je ona frekvencija na kojoj amplitudno frekvencijska karakteristika ima najveće pojačanje, a definirana je relacijom:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (8.14)$$

Na toj frekvenciji javlja se rezonantno izdizanje:

$$M_r [dB] = -20 \log \left(2\zeta \sqrt{1 - 2\zeta^2} \right). \quad (8.15)$$

Rezonantna frekvencija ω_r i rezonantno izdizanje M_r izravni su pokazatelji kvalitete zatvorenog kruga drugog reda. Sustavi višeg reda nadomještaju se sustavima drugog reda s dominantnim konjugirano kompleksnim polovima (ili realnim polovima).

Amplitudno osiguranje A_r i fazno osiguranje γ pokazatelji su kvalitete odziva zatvorenog kruga koji su dobiveni analizom otvorenog kruga automatskog upravljanja (relacija (8.16)).

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{1}{|G_o(j\omega_r)|} \\ \gamma &= \pi + \arg(G_o(j\omega_c)). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Parametriranje regulator prema zahtjevima u frekvencijskom području bazira se na namještanju parametara regulatora tako da se ostvari željena frekvencijska karakteristika sustava.

8.1.3 Zahtjevi na pogrešku slijeđenja - kriteriji optimalnosti

Zahtjevi na pogrešku slijeđenja (u daljnjem tekstu kriterij optimalnosti) zasniva se na minimiziranju regulacijske pogreške definirane izrazom:

$$e(t) = y_{ref}(t) - y(t). \quad (8.17)$$

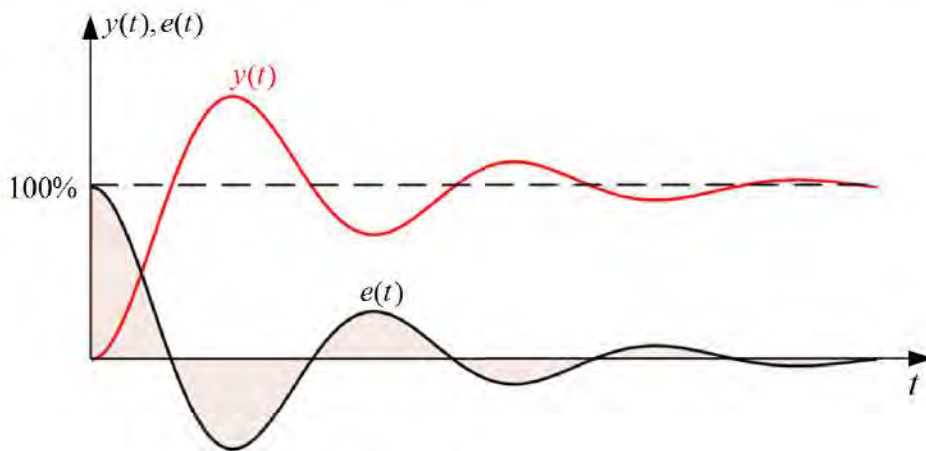
Kriteriji optimalnosti integralni su kriteriji, što znači da promatramo integral regulacijske pogreške. Općenito, kriterij optimalnosti definira se kao:

$$I = \int_0^\infty f(e(t)) dt \mapsto \min \quad (8.18)$$

gdje funkcija $f(e(t))$ može poprimiti razne oblike prema kojima kriteriji optimalnosti dobivaju ime. Prvi kriterij koji ćemo spomenuti je IE kriterij (*Integral of Error*), odnosno kriterij zasnovan na integralu pogreške slijeđenja:

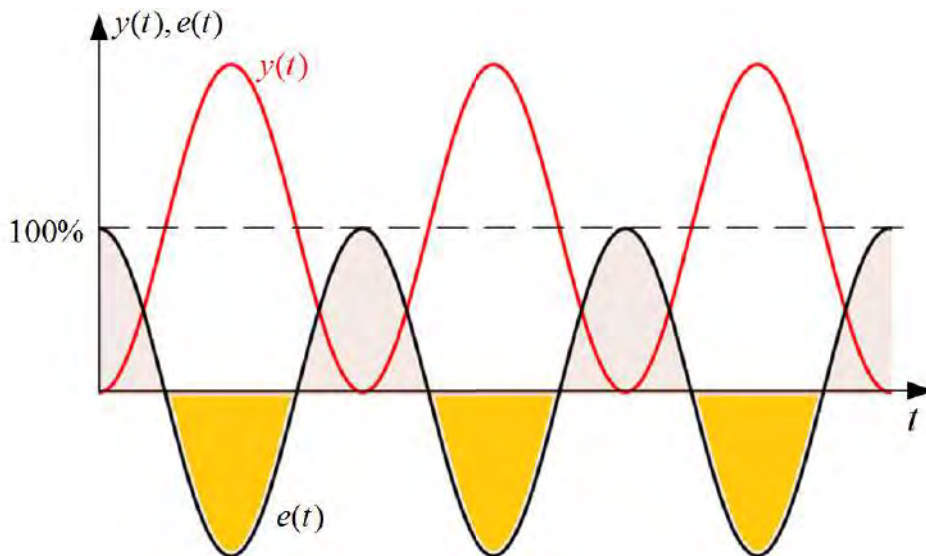
$$I_{IE} = \int_0^\infty e(t) dt \mapsto \min. \quad (8.19)$$

Integral funkcije je površina ispod te funkcije. Na slici 8.6 prikazan je odziv sustava drugog reda s prigušenim oscilatornim ponašanjem. Pogreška slijeđenja tog sustava dobivena je na temelju relacije (8.17) i također je prikazana na slici 7.7. Osjenčana površina na istoj slici predstavlja integral funkcije pogreške slijeđenja $e(t)$.



Slika 8.6: IE kriterij

Problem koji se javlja kod IE kriterija je poništavanje površina iznad i ispod vremenske osi pa tako sustav koji ima trajno oscilatorno regulacijsko odstupanje, kao sustav čiji je odziv prikazan na slici 8.7, ima svojstvo da mu se površine ispod i iznad vremenske osi konstantno poništavaju.

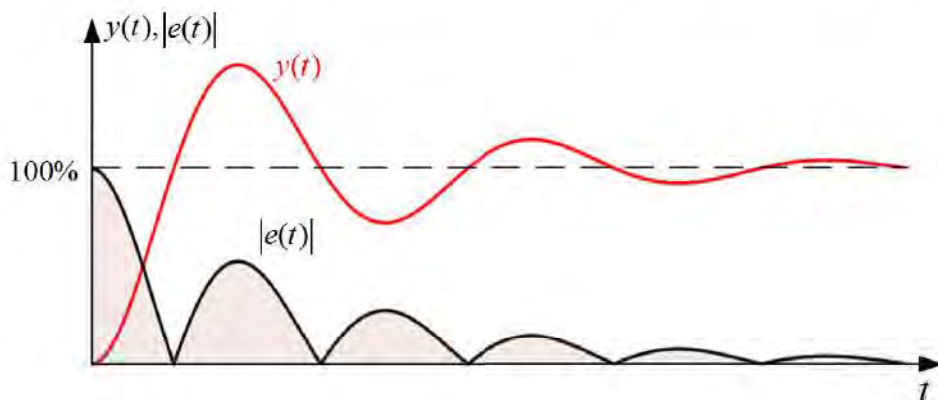


Slika 8.7: IE kriterij - nedostaci

Nedostatak IE kriterija možemo otkloniti ako je podintegralna funkcija $f(e(t))$ apsolutna vrijednost pogreške $e(t)$:

$$I_{IAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \mapsto \min. \quad (8.20)$$

Kriterij definiran relacijom (8.20) naziva se IAE kriterij (*Integrated Absolute Error*).

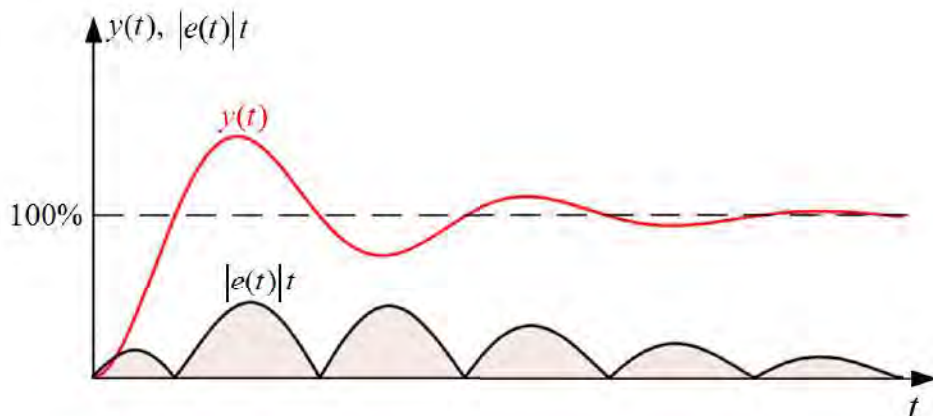


Slika 8.8: IAE kriterij

Kod IAE kriterija ne može se dogoditi situacija da se kod oscilatornih odziva kao na slici 8.7 površine ispod i iznad vremenske osi poništavaju, jer se uzima apsolutna vrijednost pogreške. Ovaj je kriterij prikladan, ali ne daje povoljne rezultate za sporo-promjenjive procese. U slučaju procesa koji imaju jednaki faktor prigušenja ζ , a različitu prirodnu frekvenciju ω_n , manju vrijednost kriterija imat će onaj proces koji je brži, odnosno s većom prirodnom frekvencijom. Kako bi se uklonio ovaj nedostatak uvodi se vremensko otežavanje apsolutne pogreške:

$$I_{ITAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| t dt \mapsto \min. \quad (8.21)$$

Kriterij definiran relacijom (8.21) naziva se ITAE kriterij (*Integral of Time Multiplied by Absolute Error*) i prikazan je na slici 8.9.

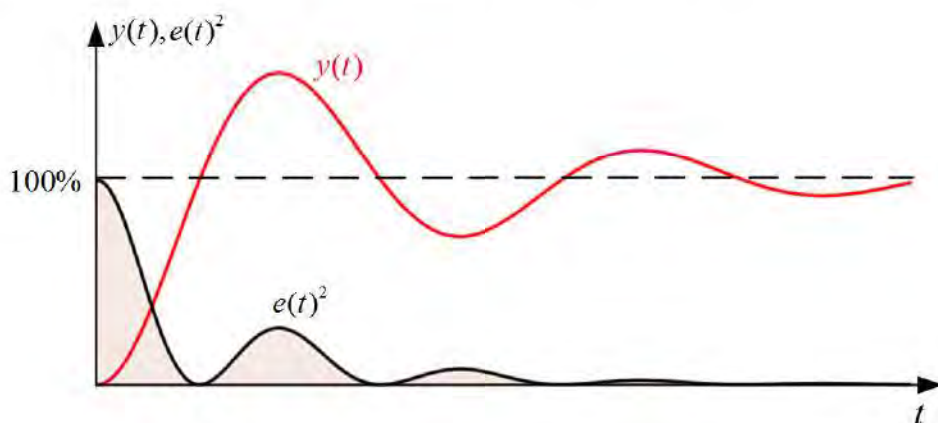


Slika 8.9: ITAE kriterij

Još jedan kriterij koji je primjenjiv je kriterij koji se bazira na integralu kvadrata regulacijske pogreške:

$$I_{ISE} = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \mapsto \min. \quad (8.22)$$

Kriterij definiran relacijom (8.22) naziva se ISE kriterij (*Integral of Squared Error*) i prikazan je na slici 8.10.



Slika 8.10: ISE kriterij

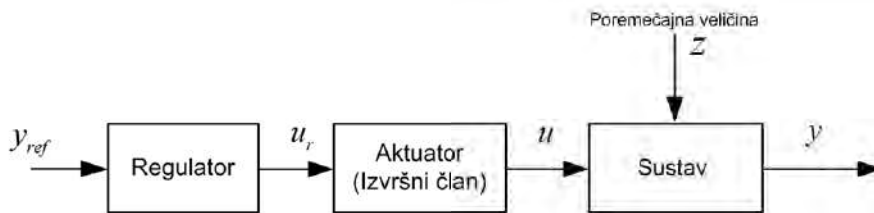
Svi navedeni kriteriji vrlo su matematički složeni jer zahtijevaju korištenje funkcija optimiranja sustava. Parametriranje regulatora prema kriterijima optimalnosti bazira se na pronalaženju parametara regulatora za koji će integralni kriterij biti minimalan. Današnji softveri poput Matlaba & *SIMULINKA*, omogućuju vrlo brzo optimiranje sustava. Iako je računalna tehnika jako napredovala, danas se još uvijek često koriste iskustvene metode parametriranja regulatora koje ćemo objasniti u nastavku.

8.2 Osnovna struktura sustava automatskog upravljanja

Od mnogih struktura upravljanja sustavom, ovdje ćemo navesti dvije:

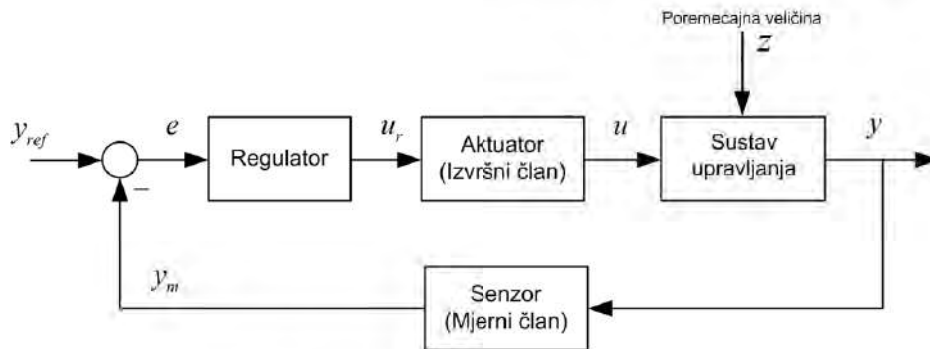
- Otvoreni krug automatskog upravljanja
- Zatvoreni krug automatskog upravljanja.

Otvoreni sustav automatskog upravljanja prikazan je na slici 8.11. Njegova je karakteristika jednostavnost strukture upravljanja. Primjer jednog otvorenog sustava automatskog upravljanja je upravljanje brzinom vrtnje istosmjernog motora promjenom napona armature. Ono na što ne možemo utjecati u otvorenom sustavu automatskog upravljanja je pogreška slijeđenja uslijed promjene opterećenja na osovini motora jer regulator “ne vidi” da je došlo do promjene brzine uslijed povećanja opterećenja. Dakle, regulator ne može ispraviti pogrešku, ako ne mjerimo izlaz iz sustava.



Slika 8.11: Otvoreni krug automatskog upravljanja

Ovaj problem rješava se uvođenjem povratne veze u sustav. Sustav zatvoren negativnom povratnom vezom (u daljnjem tekstu povratnom vezom) predstavlja zatvoreni sustav automatskog upravljanja (slika 8.12). Uz kvalitetno parametriranje regulatora može se postići željeno ponašanje sustava bez obzira na djelovanje poremećajne veličine.



Slika 8.12: Zatvoreni krug automatskog upravljanja

Na slikama 8.11 i 8.12 možemo vidjeti sljedeće signale:

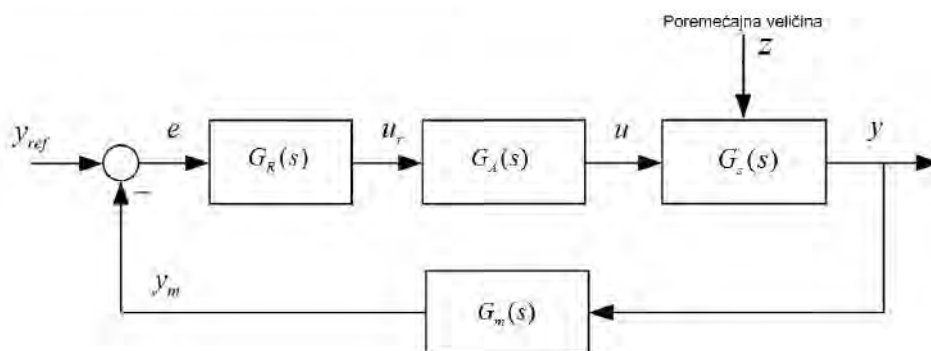
- y_{ref} - referentna vrijednost signala (postavna, vodeća vrijednost signala)
- u_r - upravljački signal (izlaz iz regulatora)
- u - ulazna veličina sustava (izlaz iz aktuatora)
- y - izlazna veličina sustava
- y_m - mjereni signal izlazne veličine sustava
- e - regulacijska pogreška (odstupanje izlazne veličine od referentne veličine)
- z - poremećajna veličina.

Blokovi koji se koriste na slikama 8.11 i 8.12 su redom:

- Sustav upravljanja

- Regulator (korekcijski član)
- Aktuator (izvršni član)
- Senzor (mjerni član).

Regulacijski sustavi sa slika 8.11 i 8.12 prikaz su osnovnih struktura automatskog upravljanja. Naprednije regulacijske strukture mogu se pronaći u literaturama [1], [8].

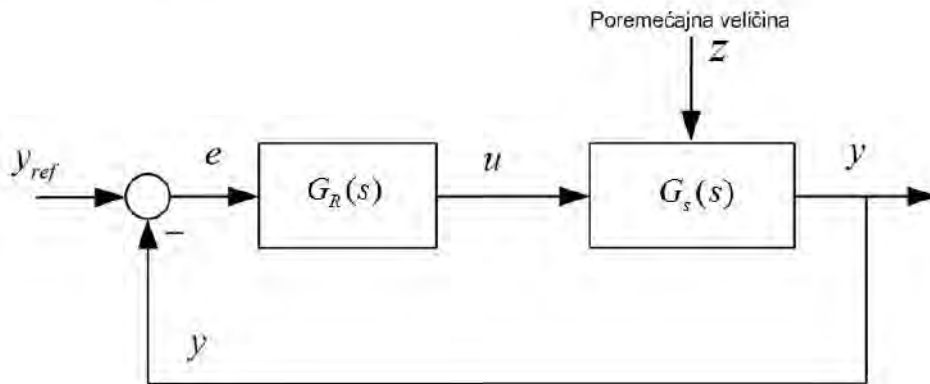


Slika 8.13: Zatvoreni krug automatskog upravljanja (prijenosne funkcije)

Na slici 8.13 nalazi se zatvoreni krug automatskog upravljanja s prijenosnim funkcijama, gdje su:

- $G_s(s)$ - prijenosna funkcija sustava upravljanja
- $G_A(s)$ - prijenosna funkcija aktuatora (izvršnog člana)
- $G_m(s)$ - prijenosna funkcija senzora (mjernog člana)
- $G_R(s)$ - prijenosna funkcija regulatora.

Često se u sintezi regulacijskog kruga aktuator (izvršni član) i senzor (mjerni član) uključuju u sustav upravljanja te stoga zatvoreni sustav upravljanja ima novu formu prikazanu na slici 8.14. Zatvoreni krug automatskog upravljanja, u formi navedenoj na slici 8.14, predstavlja zatvoreni krug automatskog upravljanja jediničnom povratnom vezom.



Slika 8.14: Zatvoreni krug automatskog upravljanja (aktuator i mjerni član uključeni u regulator i sustav upravljanja)

U nastavku ćemo pojedinačno opisati blokove sa slika 8.11 i 8.12.

8.3 Sustav upravljanja

Početak ove knjige uveliko se bavi sustavima. U poglavlju *Osnovni pojmovi* obrađujemo dinamičke sustave te se u nastavku opredjeljujemo za tehničke sustave. Nakon toga smo klasificirali sustave prema karakteristikama sustava. Sustavi kojima se mi bavimo su tzv. LTI sustavi (*Linear Time Invariant Systems*), odnosno linearni vremenski nepromjenjivi sustav. Ovi sustavi opisuju se prijenosnom funkcijom ili linearnom diferencijalnom jednadžbom. LTI sustavi opisuju se matematičkim modelima opisanim u trećem poglavlju. Općeniti sustav kao objekt upravljanja (sustav kojim želimo upravljati) možemo opisati općenitom prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{1}{s^k} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^{n-k} + a_{n-1} s^{n-k-1} + \dots + a_{k+1} s + a_k}. \quad (8.23)$$

Sustav prikazan prijenosnom funkcijom (8.23) za:

- $k = 0$, ima astatizam nultog reda (statički sustav)
- $k = 1$, ima astatizam prvog reda (astatički sustav)
- $k = 2$, ima astatizam drugog reda (astatički sustav).

Broj k zapravo predstavlja broj integralnih djelovanja (broj integratora) u sustavu. Prilikom odabira regulatora bitno je imati na umu da li je sustav statički ili je sustav astatički jer to direktno utječe na statičku pogrešku sustava. Statičko pojačanje sustava

računa se prema relaciji:

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G_s(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^k} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^{n-k} + a_{n-1} s^{n-k-1} + \dots + a_{k+1} s + a_k}. \quad (8.24)$$

Prema relaciji (8.24) statički sustavi imaju pojačanje:

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G_s(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^{n-k} + a_{n-1} s^{n-k-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_0}{a_0}, \quad (8.25)$$

a astatički sustavi imaju pojačanje:

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G_s(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^k} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^{n-k} + a_{n-1} s^{n-k-1} + \dots + a_{k+1} s + a_k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^k} \frac{b_0}{a_k} = \infty. \quad (8.26)$$

Dakle, statički sustavi imaju konačno pojačanje, a astatički beskonačno pojačanje. Pretpostavimo da je sustav upravljan proporcionalnim regulatorom (o proporcionalnom regulatoru nešto kasnije), što znači da je blok regulatora konstanta K_R . Otvoreni krug $G_o(s)$ tada je, prema slici 8.14:

$$G_o(s) = K_R G_s(s). \quad (8.27)$$

Ako na zatvoreni krug automatskog upravljanja dovedemo jediničnu skokovitu pobudu, tada pogrešku slijeđenja u stacionarnom stanju možemo izračunati prema:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_o(s)} U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + K_R G_s(s)} U(s). \quad (8.28)$$

Za primjer statičkog sustava $G_s(s)$:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{4s^2 + 3s + 1} \quad (8.29)$$

prema relaciji (8.28) vrijedi:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_o(s)} U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + K_R \frac{K_s}{4s^2 + 3s + 1}} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + K_R K_s} \quad (8.30)$$

Iz relacije (8.30) vidimo da postoji trajno regulacijsko odstupanje koje se smanjuje povećanjem parametra regulatora K_R . Povećanjem parametra K_R sustav postaje nestabilniji te stoga u regulator moramo uključiti integralno djelovanje. Ako sustav posjeduje integralno djelovanje (integrator), kao na primjer $G_s(s)$:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{s^3 + s^2 + s} = \frac{1}{s} \frac{K_s}{s^2 + s + 1}, \quad (8.31)$$

tada za sustav (8.31) prema relaciji (8.28) vrijedi:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_o(s)} U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + K_R \frac{1}{s} \frac{K_s}{s^2 + s + 1}} \frac{1}{s} = 0. \quad (8.32)$$

Na temelju relacije (8.32) vidimo da astatički sustav u zatvorenom krugu upravljanja, nema pogreške u stacionarnom stanju. U industriji nalazimo mnoštvo sustava upravljanja koje je potrebno upravljati na način da se ostvari željeno ponašanje sustava. Kod raznih pokretnih traka koje pokreću električni motori bitno je da startanje trake bude “meko”, odnosno da ne dolazi do naglog pokretanja trake. U slučaju da takve trake transportiraju flaširanu vodu ili mlijeko, pri naglim pokretima dolazilo bi do prevrtanja boca.

Sustav skladištenja tekućine također je sustav kojim je potrebno upravljati kako kod otvorenog spremnika ne bi dolazilo do prelijevanja tekućine, a kod zatvorenog spremnika do stvaranja visokog tlaka zbog nestlačivosti tekućine.

Često se u prostorima, mediju i sl. regulira temperatura, koja je sporopromjenjiva veličina. Zbog velike tromosti temperature potrebno je na vrijeme procijeniti mogući prebačaj temperature iznad stacionarnog stanja.

Robotski manipulatori karakteristični su po regulaciji pozicije. Na početku poglavlja vidjeli smo da nije dobro da u regulacijskom krugu pozicije imamo nadvišenje u odzivu prijelazne funkcije. Robotski manipulatori često sadrže više od jednog regulatora. Često krećemo od same regulacije struje motora kako bi se uklonili poremećaji uslijed promjene tereta. Zatim se na sljedećoj razini upravlja brzinom vrtnje tog motora i na kraju pozicijom tog motora. Ovakve sustave upravljanja nazivamo kaskadnim sustavima upravljanja.

Avion kao sustav upravljanja jedan je od najsloženijih sustava današnjice. Stotine regulacijskih članova brinu o fizikalnim varijablama kako bi se nalazile u željenim granicama. Autopilot navodi avion sustavom upravljanja iz jedne točke u drugu točku po optimalnoj putanji i uz najmanju moguću potrošnju goriva.

Svi navedeni sustavi upravljani su regulacijskim članovima, odnosno regulatorima.

8.4 Regulator

Regulator je dio automatskog sustava upravljanja koji sustav održava u željenom stanju. Struktura i parametri sustava upravljanja u idealnim su uvjetima nepromjenjivi. U praksi, zbog trošenja i zamora materijala, parametri sustava su ipak promjenjivi. Kod regulatora i struktura i parametri su promjenjivi. Na temelju analize sustava upravljanja, odabiremo strukturu i parametre regulatora na način da se ostvari željeno ponašanje sustava upravljanja. Za linearne sustave postoji mnogo načina na koji se može izvršiti parametriranje regulatora.

Regulator na temelju pogreške slijeđenja mjerene izlazne veličine $e(t) = y_{ref}(t) - y_m(t)$ stvara upravljački signal $u_r(t)$ koji služi kao nalog izvršnom članu za dovodenjem energije u sustav. Razne su inačice regulatora poznate u svijetu automatskog upravljanja, ali najčešće inačice temelje se na tri osnovna ponašanja:

- Proporcionalno (P) ponašanje

- Integralno (I) ponašanje
- Derivacijsko (D) ponašanje.

Na temelju navedena tri ponašanja formiraju se razne strukture regulatora poput P, PI, PD i PID regulatora, ovisno o zahtjevu na sustav upravljanja. Prema slici 8.14 regulator je serijski povezan sa sustavom upravljanja preko aktuatora. Prema frekvencijskim kriterijima stabilnosti, za analizu stabilnosti sustava automatskog upravljanja koristit ćemo funkciju otvorenog kruga $G_o(s)$ za koju vrijedi:

$$G_o(s) = G_R(s)G_A(s)G_s(s). \quad (8.33)$$

Relacija (8.33) i znanja koja smo stekli u poglavlju o stabilnosti automatskog sustava upravljanja mogu nam pomoći u odabiru strukture regulatora. U nastavku ćemo obraditi osnovne strukture regulatora.

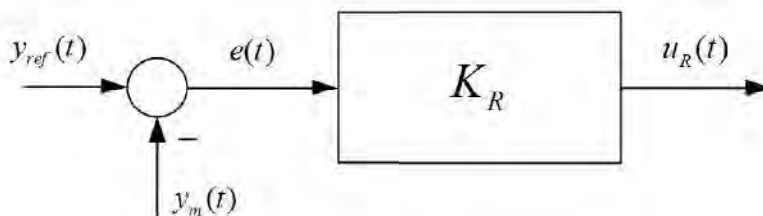
8.4.1 P regulator

Proporcionalni ili P regulator opisan je sljedećom diferencijalnom jednačbom:

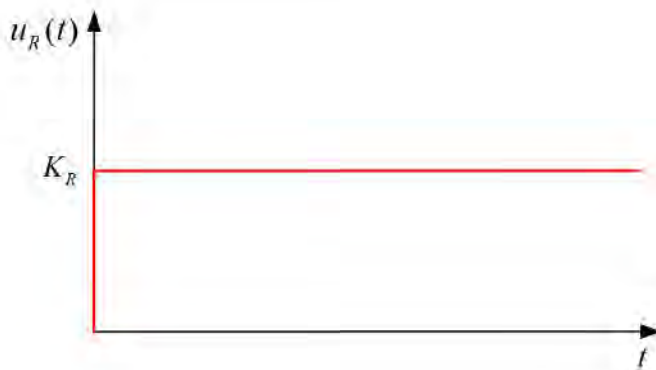
$$u_R(t) = K_R e(t). \quad (8.34)$$

gdje je K_R koeficijent pojačanja P regulatora. Prijenosna funkcija P regulatora je:

$$G_R(s) = \frac{U_R(s)}{E(s)} = K_R \quad (8.35)$$

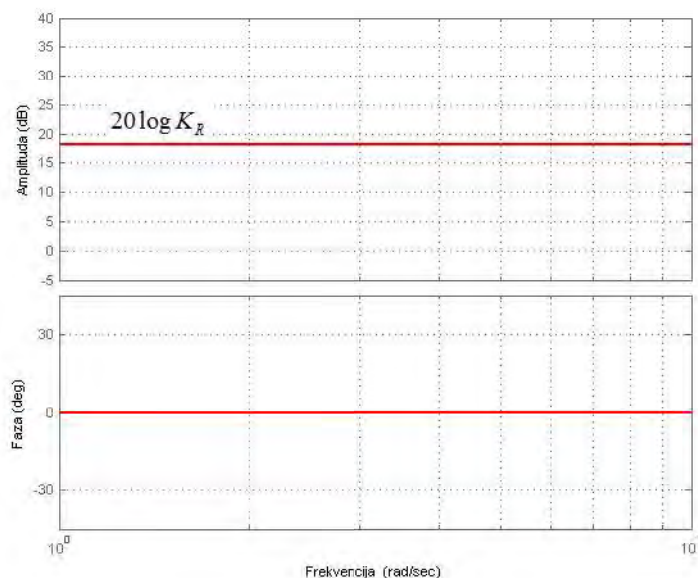


Slika 8.15: P regulator - blokovska shema



Slika 8.16: Prijelazna funkcija P regulatora

Blok shema P regulatora prikazana je na slici 8.15, a prijelazna funkcija P regulatora prikazana je na slici 8.16. Kao što se vidi, prijelazna funkcija identična je prijelaznoj funkciji P člana koji smo obradili u poglavlju *Vremenski odziv osnovnih dinamičkih članova*. Svojstva P regulatora mogu se odrediti uz pomoć Bodeovog dijagrama sa slike 8.17.



Slika 8.17: Bodeov dijagram P regulatora

Povećanjem koeficijenta pojačanja K_R povećava se brzina odziva sustava jer se povećava i presječna frekvencija ω_c . Za sustave trećeg i višeg reda, povećanjem koeficijenta K_R možemo sustav učiniti nestabilnim jer će fazna karakteristika otvorenog kruga na presječnoj ω_c frekvenciji biti manja od -180° . Kod sustava s astatizmom 1. reda, odabirom prikladnog koeficijenta K_R možemo osigurati da je regulacijska pogreška jednaka nuli. Kod statičkih sustava to nije tako. Povećanjem koeficijenta K_R postiže se sma-

njenje regulacijske pogreške, ali istovremeno se i narušava stabilnost sustava. Nekada nam ta pogreška u stacionarnom stanju i nije toliko bitna jer je često upitno da li je mjerena veličina mjernim sensorima ispravna ili i ona unosi grešku u sustav. Primjer sustava gdje statička greška nije od presudne važnosti je sustav skladištenja tekućine. Kod pozicioniranja robotskog manipulatora, statička pogreška mora se svesti na nulu. P regulator je najjednostavnija struktura regulatora.

8.4.2 PI regulator

Širu primjenu od P regulatora ima proporcionalno integralni ili PI regulator koji je opisan sljedećom diferencijalnom jednačbom:

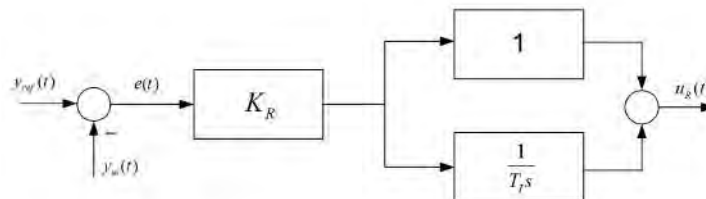
$$u_R(t) = K_R e(t) + \frac{K_R}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (8.36)$$

gdje su:

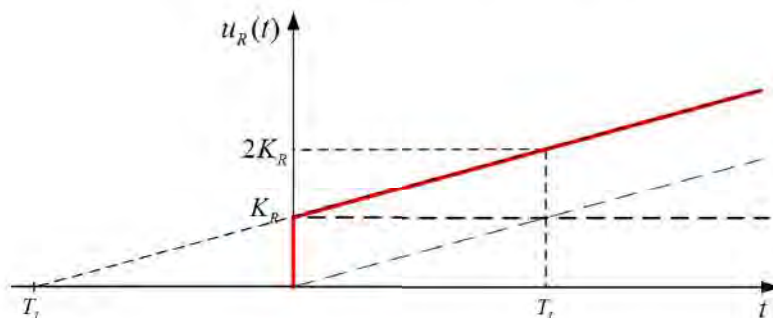
- K_R - koeficijent proporcionalnog pojačanja
- T_I - integralna vremenska konstanta, [s].

Prijenosna funkcija PI regulatora je:

$$G_R(s) = \frac{U_R(s)}{E(s)} = K_R + \frac{K_R}{T_I s} = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s}. \quad (8.37)$$



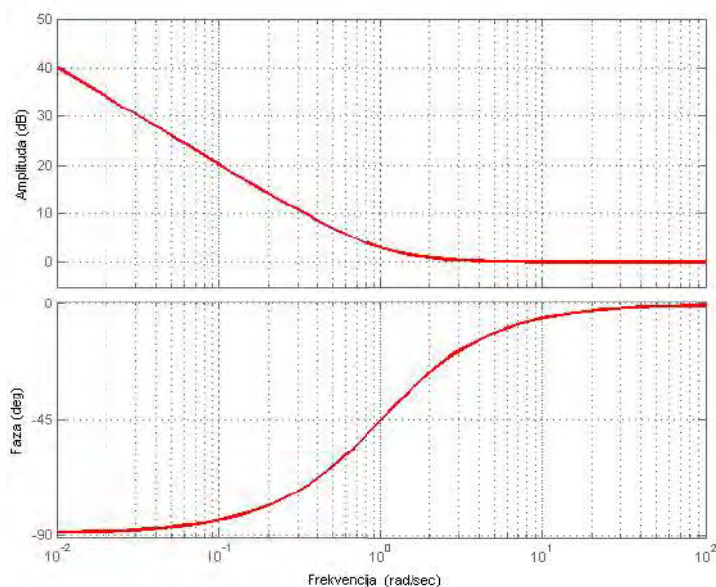
Slika 8.18: PI regulator - blokovska shema



Slika 8.19: Prijelazna funkcija PI regulatora

Blok shema PI regulatora prikazana je na slici 8.18, a prijelazna funkcija PI regulatora prikazana je na slici 8.19. Svojstva PI regulatora mogu se odrediti uz pomoć Bodeovog dijagrama sa slike 8.20.

Radi jednostavnosti, nacrtan je Bodeov dijagram za PI regulator s jediničnim pojačanjem i integralnom vremenskom konstantom od jedne sekunde. Ako upravljamo statičkim procesom, tada kod P regulatora samo beskonačno pojačanje osigurava regulacijsku pogrešku jednaku nuli. Stacionarno stanje je ono stanje kada u sustavu prođu sve prijelazne pojave, a to će se dogoditi kada frekvencija sustava teži nuli. PI regulator na niskim frekvencijama ima beskonačno pojačanje što se i vidi na Bodeovom dijagramu 8.20. Ovo svojstvo PI regulatora omogućuje uklanjanje regulacijskog odstupanja kod statičkih sustava. Kod astatičkih sustava moguće uvođenjem PI regulatora u otvoreni krug upravljanja učiniti sustav nestabilnim. Stoga moramo pažljivo odabrati parametare PI regulatora. Kao i kod P regulatora, koeficijentom K_R u PI regulatoru povećava se brzina odziva sustava. Krivim odabirom integralne vremenske konstante (njezinim smanjenjem) astatički sustav postaje nestabilan zbog fazne karakteristike otvorenog kruga koja se smanjuje na vrijednost manju od -180° na presječnoj frekvenciji ω_c . PI regulator često se koristi u industriji jer je istovremeno moguće postići veliku brzinu odziva i osigurati da sustav nema regulacijsko odstupanje.



Slika 8.20: Bodeov dijagram PI regulatora

8.4.3 PID regulator

Regulator koji objedinjuje sva tri navedena ponašanja je proporcionalno integralno derivacijski ili PID regulator koji je opisan sljedećom diferencijalnom jednačbom:

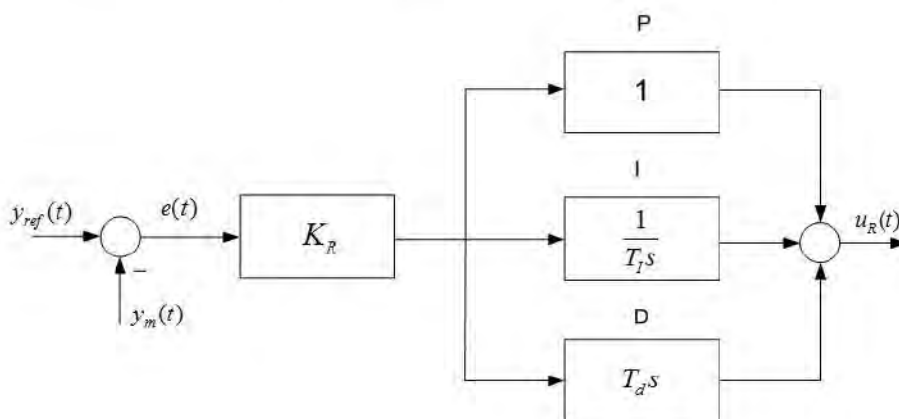
$$u_R(t) = K_R e(t) + \frac{K_R}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_R T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (8.38)$$

gdje su:

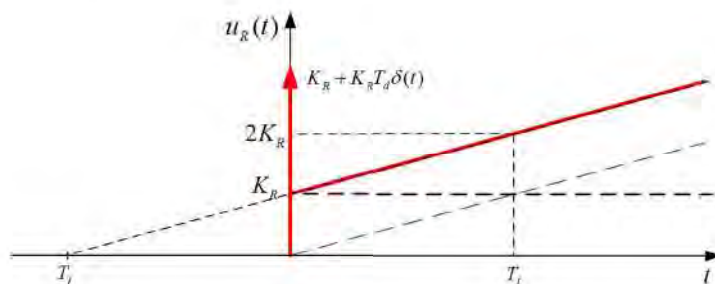
- K_R - koeficijent proporcionalnog pojačanja
- T_I - integralna vremenska konstanta, [s]
- T_d - derivacijska vremenska konstanta, [s]

Prijenosna funkcija PID regulatora je:

$$G_R(s) = \frac{U_R(s)}{E(s)} = K_R + \frac{K_R}{T_I s} + K_R T_d s = K_R \frac{T_d T_I s^2 + T_I s + 1}{T_I s}. \quad (8.39)$$



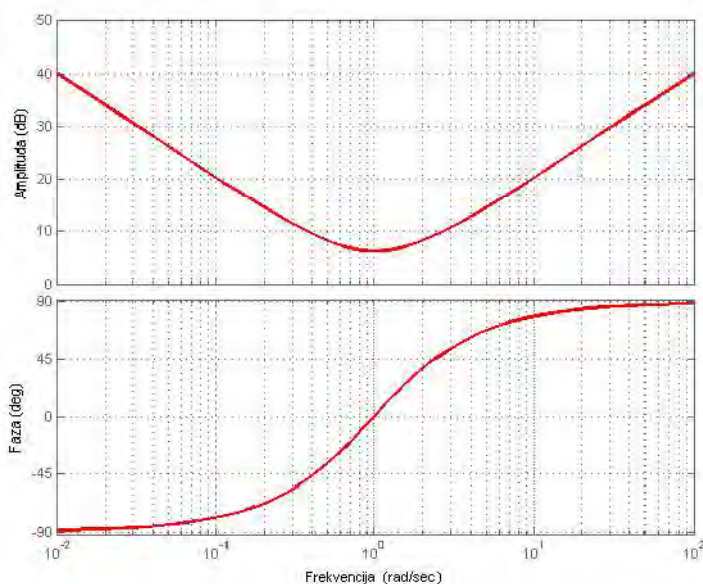
Slika 8.21: PID regulator - blokovska shema



Slika 8.22: Prijelazna funkcija PID regulatora

Blok shema PID regulatora prikazana je na slici 8.21, a prijelazna funkcija PID regulatora prikazana je na slici 8.22. Svojstva PID regulatora mogu se odrediti uz pomoć Bodeovog dijagrama sa slike 8.23.

PID regulator danas je najčešće korišteni regulator u industriji jer sadrži sva tri osnovna djelovanja (P, I, D). Prijelazna funkcija PID regulatora prikazana je na slici 8.22. Komponenta D u PID regulatoru utječe na sustav pri promjeni regulacijske pogreške. PID regulator posjeduje sve karakteristike PI regulatora, ubrzava odziv sustava, osigurava da je regulacijsko odstupanje statičkog sustava jednako nula. Derivacijska komponenta povećava stabilnost zatvorenog kruga jer na višim frekvencijama diže faznu karakteristiku sustava te se tako može osigurati potrebno fazno osiguranje sustava. Osim dizanja fazne karakteristike sustava na višim se frekvencijama podiže i amplitudna karakteristika sustava. To međutim, nije poželjno zbog pojačanja mjernog šuma koji se unosi u regulacijski krug putem mjernih senzora. Mjerni šum je uvijek problem u sustavima upravljanja pa se često koriste mjerni filtri za prigušenje visoko frekventnih signala.



Slika 8.23: Bodeov dijagram PID regulatora

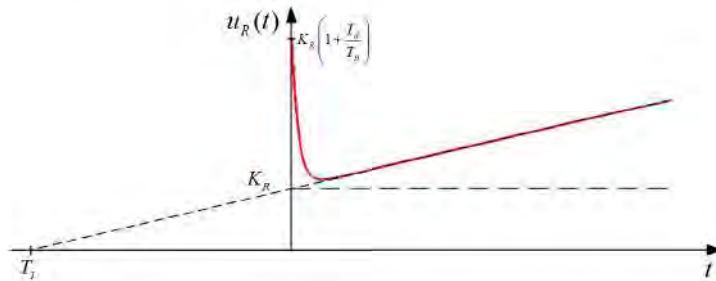
PID regulator možemo promatrati kao osnovni regulator, a sve ostale regulatore kao njegove posebne slučajeve. Ako je derivacijska konstanta $T_d = 0$, tada PID regulator postaje PI regulator. Ako je $T_d = 0$ i $T_I \rightarrow \infty$, tada PID regulator postaje P regulator. U slučaju da $T_I \rightarrow \infty$, tada PID regulator postaje PD regulator koji ćemo opisati u nastavku.

Ako promatramo prijenosnu funkciju PID regulatora (8.42), tada se može vidjeti da je PID regulator nekauzalan sustav jer je red brojnika veći od reda nazivnika. Neka-uzalni regulator nije tehnički izvediv te se stoga najčešće koristi realni PID regulator s

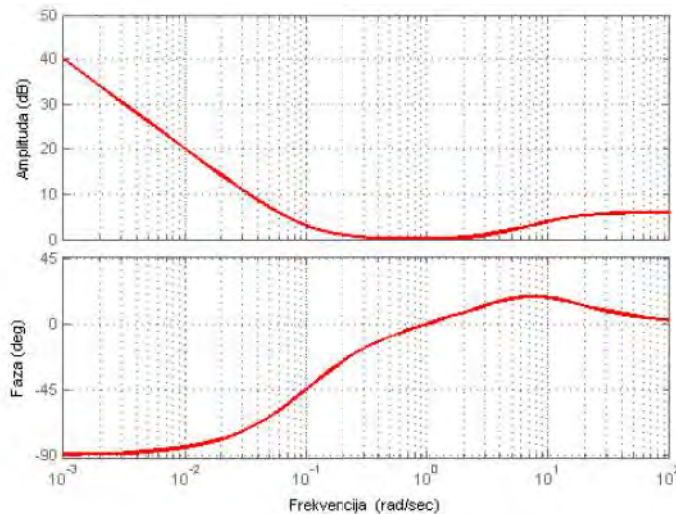
prijenosnom funkcijom:

$$G_R(s) = \frac{U_R(s)}{E(s)} = K_R + \frac{K_R}{T_I s} + K_R \frac{T_d s}{T_p s + 1} = K_R \frac{T_d T_I s^2 + (T_I s + 1)(T_p s + 1)}{T_I s (T_p s + 1)} \quad (8.40)$$

gdje je T_p parazitna vremenska konstanta derivatora.



Slika 8.24: Prijelazna funkcija realnog PID regulatora



Slika 8.25: Bodeov dijagram realnog PID regulatora

Prijelazna funkcija realnog PID regulatora prikazana je na slici 8.24. Bodeov dijagram realnog PID regulatora prikazan je na slici 8.25. Ono što se može primijetiti je uklanjanje pojačanja visokofrekvencijskih signala. Izdizanje fazne karakteristike osigurava stabilnost sustava. Realni PID regulator najpovoljniji je odabir pri regulaciji sustava s time da se ponekad jedno od djelovanja može isključiti, To naravno, ovisi o vrsti sustava i zahtjevima na sustav upravljanja.

8.4.4 PD regulator

Proporcionalno derivacijski ili PD regulator opisan je sljedećom diferencijalnom jednažbom:

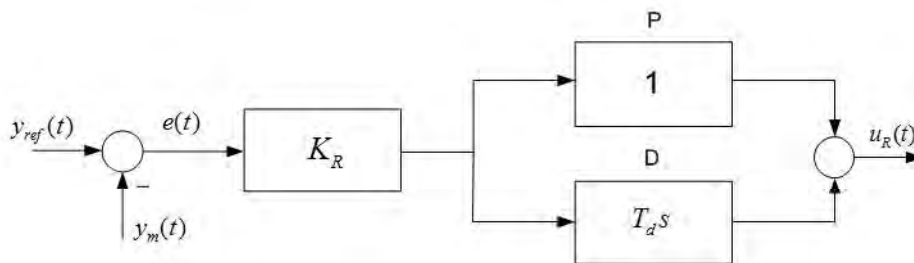
$$u_R(t) = K_R e(t) + K_R T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (8.41)$$

gdje su:

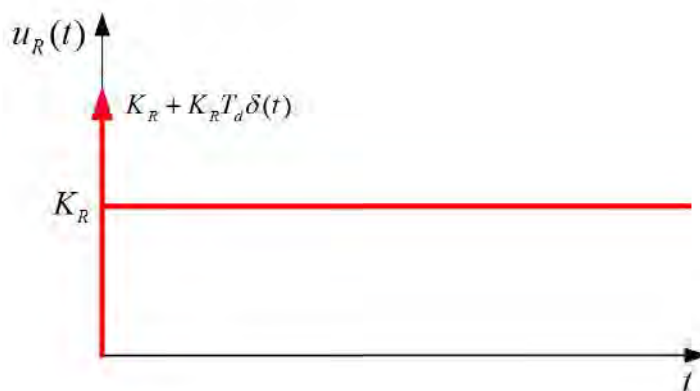
- K_R - koeficijent proporcionalnog pojačanja
- T_d - derivacijska vremenska konstanta, [s]

Prijenosna funkcija PD regulatora je:

$$G_R(s) = \frac{U_R(s)}{E(s)} = K_R + K_R T_d s = K_R(1 + T_d s). \quad (8.42)$$



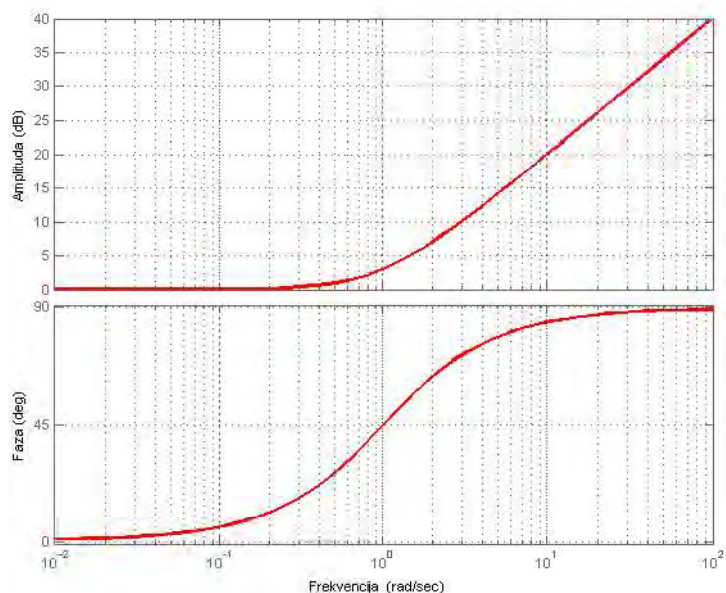
Slika 8.26: PD regulator - blokovska shema



Slika 8.27: Prijelazna funkcija PD regulatora

Blok shema PD regulatora prikazana je na slici 8.26, a prijelazna funkcija PD regulatora prikazana je na slici 8.27. Svojstva PD regulatora mogu se odrediti uz pomoć Bodeovog dijagrama sa slike 8.28.

Do sada smo samo obradili inačice PID regulatora kojima se stabilno može upravljati sustavima s astatizmom 1. reda (sustavi s jednim integratorom) i statičkim sustavima. Ako upravljamo slijednim sustavom, tada takav sustav ima astatizam 2. reda koji je samim time nestabilan jer mu je fazna karakteristika uvijek ispod -180° . Da bismo na presječnoj frekvenciji podigli fazu iznad -180° koristi se PD regulator s Bodeovim dijagramom na slici 8.28.



Slika 8.28: Bodeov dijagram PD regulatora

PD regulator na taj način ostvaruje stabilnost sustava s astatizmom 2. reda. Najčešće se koristi u slijednim sustavima. Problem koji se javlja kod slijednih sustava je pogreška u stacionarnom stanju koja se javlja zbog momenta tereta. Npr. ako upravljamo pozicijom robotskog manipulatora koji prenosi teret, korištenjem samo PD regulatora doći će do regulacijskog odstupanja. Taj problem može se riješiti kaskadnom regulacijom.

8.5 Aktuator (Izvršni član)

Aktuatori su izvršni članovi [19] koji primaju upravljački signal (najčešće u obliku električnog signala) od strane regulatora te uzrokuju promjene u sustavu generirajući silu, pokret, toplinski tok, električnu energiju, tok fluida i dr. Aktuator se koristi zajedno u kombinaciji sa izvorom energije (električne, toplinske, energije fluida i dr.).

Aktuatori se klasificiraju prema vrsti energije koju doziraju u sustav. Oni mogu biti električni, elektromehanički, elektromagnetski, mehanički, hidraulički, pneumatski i dr.

U električne aktuatore spadaju diode, bipolarni tranzistori, MOSFET tranzistori, dijeci, trijci, releji i dr. Elektromehanički aktuatori su istosmjerni motori, sinkroni i asinkroni izmjenični motori, koračni motori i dr. Od elektromagnetskih aktuatora najčešće se koriste elektromagnetski ventili koji omoguću protok raznih medija (ulja, vode zraka i dr.). Hidraulični i pneumatski cilindri pripadaju skupini hidrauličnih i pneumatskih aktuatora pri čemu se hidrauličnim aktuatorima razvijaju velike snage, a pneumatskim male.

Pri upravljanju sustavom, upravljački signal regulatora samo je nositelj informacije, odnosno govori nam koliko će energije aktuator dozirati u sustav. Tako u slučaju upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog motora, generira se signal za pojačalo snage koje je spojeno na motor. Pojačalo snage može biti izvedeno na razne načine od kojih ćemo jedan obraditi nešto kasnije.

8.6 Senzor (Mjerni član)

Senzor je mjerni uređaj [19] koji kada je izložen nekoj fizikalnoj pojavi (temperaturi, sili, svjetlu, dodiru, protoku fluida i sl.), generira izlazni signal koji je najčešće električni, a može biti i mehanički, magnetski i dr. Dakle, senzor je uređaj koji reagira na promjenu fizikalnih pojava, odnosno varijabli u sustavu. Kada je u pitanju upravljanje sustavima, senzor služi kao posrednik koji ostvaruje povratnu vezu u sustavu automatskog upravljanja. Mjerenjem izlaza sustava omogućujemo njegovu usporedbu sa referentnim signalom. Razlika referentnog signala i mjerenog signala dovodi se na ulaz regulatora.

Senzori mogu biti analogni i digitalni ovisno o izlaznom signalu. Analogni senzor proizvodi analogne signale (najčešće naponske od 0 - 10 V ili strujne od 4 - 20 mA) dok digitalni senzori proizvode digitalne signale. Primjer analognog senzora je NTC otpornik koji služi za mjerenje temperature. Postoje i digitalni senzori temperature kao što je DS18B20 senzor koji temperaturu predstavlja digitalnom riječju.

Senzori koji se najčešće koriste u sustavima automatskog upravljanja su linearni senzori pomaka i rotacijski senzori, senzori akceleracije, temperature, sile, momenta, tlaka, protoka, svjetlosti i dr.

Kod robotskih manipulatora najčešće se koriste enkoderi, odnosno rotacijski senzori koji generiraju niz impulsa čiji je broj proporcionalan brzini vrtnje motora koji pomiče zglobov robotskog manipulatora.

Senzorima završavamo opis pojedinog podsustava zatvorenog sustava automatskog upravljanja. U nastavku ćemo se baviti parametriranjem regulatora.

8.7 Parametriranje osnovnih inačica regulatora

U potpoglavlju o regulatorima obradili smo osnovne strukture regulatora koje sadrže proporcionalno, integralno i derivacijske ponašanje. Strukture regulatora koje smo

obradili određene su parametrima K_R , T_I i T_D . Da bi regulator odradio svoju funkciju i držao sustav u željenom stanju stabilno, potrebno je odrediti parametre regulatora K_R , T_I i T_D . Ovisno o strukturi regulatora, određivat ćemo parametre koji egzistiraju u odabranoj strukturi regulatora. U nastavku ćemo obraditi dvije praktične metode parametriranja regulatora:

- Ziegler-Nicholsova metoda parametriranja regulatora
- Metoda tehničkog optimuma

Osim navedenih metoda, postoje razne druge metode parametriranja regulatora.

8.8 Ziegler-Nicholsova metoda parametriranja regulatora

Ziegler-Nicholsova metoda parametriranja regulatora spada u eksperimentalne (iskustvene) metode parametriranja regulatora. Ova metoda dobra je za kompenzaciju poremećajne veličine, dok lošije rezultate daje kod slijeđenja referentne veličine. U praksi je neki sustav najčešće potrebno držati u određenoj radnoj točki. Djelovanje poremećajne veličine na sustav uzrokovat će promjenu izlazne veličine te stoga Ziegler-Nicholsova metoda parametriranja regulatora daje parametre regulatora koji će brzo kompenzirati poremećajnu veličinu. Dvije su metode parametriranja regulatora po Ziegler-Nicholsu [1], [20]:

- Metoda ruba stabilnosti
- Metoda prijelazne funkcije.

Metoda ruba stabilnosti ne preporuča se na realnim sustavima jer se temelji na dovođenju sustava na rub stabilnosti, odnosno u trajne oscilacije. Sustav na ovaj način lako može ući u nestabilno područje rada, ali može doći i do oštećenja mehaničkih dijelova sustava. Metoda ruba stabilnosti koristi se kada je poznat matematički model sustava u bilo kojem obliku. Metoda prijelazne funkcije češće se koristi u praksi jer se parametriranje ovom metodom zasniva na poznavanju prijelazne funkcije sustava (odziva sustava na jediničnu skokovitu pobudu).

8.8.1 Parametriranje regulatora Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti

Da bi se dobili parametri odabrane strukture regulatora metodom ruba stabilnosti, potrebno je provesti sljedeće korake [10]:

1. Odabranom regulatoru u zatvorenom sustavu automatskog upravljanja isključe se sva djelovanja osim proporcionalnog djelovanja (ako postoje, I i D djelovanja se isključuju tako da se postavi $T_I \rightarrow \infty$, $T_D = 0$).

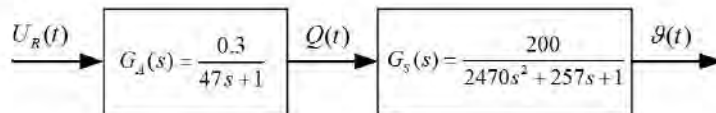
2. Pojačanje P regulatora K_R povećava se dok se god na izlazu sustava ne pojave trajne oscilacije (dok sustav ne dođe do ruba stabilnosti). Pojačanje koje izaziva trajne oscilacije sustava naziva se kritičnim pojačanjem K_{Rkr} .
3. Izmjeri se period trajnih oscilacija $T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_{\pi}}$, tzv. kritični period.
4. Na temelju kritičnog pojačanja K_{Rkr} i kritičnog perioda T_{kr} određuju se vrijednosti parametara odabranog regulatora prema tablici 8.1.

Tablica 8.1: Parametri regulatora dobiveni Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti

Tip Regulatora	K_R	T_I	T_D
P	$0.5K_{Rkr}$	∞	0
PI	$0.45K_{Rkr}$	$0.85T_{kr}$	0
PID	$0.6K_{Rkr}$	$0.5T_{kr}$	$0.12T_{kr}$

Parametri određeni Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti približna su pravila i njima možemo približno postići željenu kvalitetu upravljanja. Da bismo postigli veću kvalitetu upravljanja možemo koristiti simulaciju na računalu, a parametre dobivene Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti kao dobre početne parametre za optimiranje sustava metodama optimizacije. Metode optimizacije nećemo obrađivati.

Pokušajmo odrediti parametre regulatora peći koja se koristi u pekarskoj industriji. Sustav peći s grijačem prikazan je na slici 8.29.



Slika 8.29: Sustav peći s grijačem

Sustav sa slike 8.29 možemo razložiti na prijenosnu funkciju grijača (aktuatora):

$$G_A(s) = \frac{0.3}{47s + 1} \quad (8.43)$$

i prijenosnu funkciju peći (sustava):

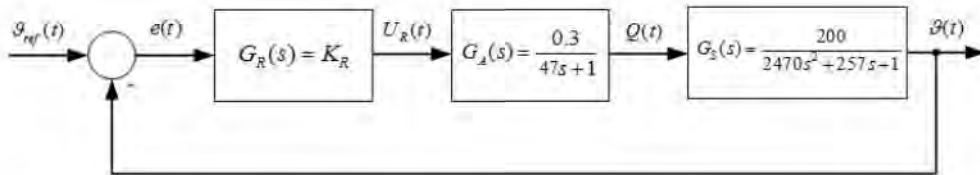
$$G_S(s) = \frac{200}{2470s^2 + 257s + 1} \quad (8.44)$$

Grijač na temelju upravljačkog signala $U_R(t)$ zagrijava pećnicu toplinskim tokom $Q(t)$. Toplinski tok rezultira povećanjem temperature pećnice $\vartheta(t)$. Prijenosna funkcija kaskade grijača i peći je:

$$\begin{aligned} G_{AS}(s) &= G_A(s)G_S(s) = \frac{0.3}{47s+1} \frac{200}{2470s^2+257s+1} \\ G_{AS}(s) &= \frac{60}{116090s^3+14549s^2+304s+1} \end{aligned} \quad (8.45)$$

Na temelju prijenosne funkcije (8.45) zaključujemo da je sustav statički jer nema integratora u otvorenom krugu. Prilikom analize struktura regulatora, spomenuli smo da P regulator ne može ispraviti statičku pogrešku na statičkom procesu. Prema tome, odabrat ćemo PI regulator za upravljanje sustavom peći. Iako smo odabrali PI regulator za regulaciju sustava peći, pokazat ćemo da odabirom P regulatora dolazi do statičke pogreške.

Izračunajmo sada, slijedeći navedene četiri točke sinteze metodom ruba stabilnosti, parametre P i PI regulatora peći. Uključimo sada u zatvoreni krug automatskog upravljanja proporcionalni regulator s parametrom K_R (slika 8.30).



Slika 8.30: Sustav peći s grijačem u zatvorenom krugu automatskog upravljanja s P regulatorom

Prijenosna funkcija otvorenog kruga kaskada je P regulatora, grijača i peći:

$$G_o(s) = \frac{60K_R}{116090s^3 + 14549s^2 + 304s + 1}. \quad (8.46)$$

Koeficijent pojačanja proporcionalnog regulatora potrebno je povećavati do trenutka kada se pojave trajne oscilacije, odnosno kada sustav dođe na rub stabilnosti. Vrijednost pojačanja K_R možemo izračunati koristeći Nyquistov dijagram. U prijenosnu funkciju otvorenog kruga $G_o(s)$ uvedimo supstituciju $s = j\omega$:

$$G_o(j\omega) = \frac{60K_R}{1 - 14549\omega^2 + j304\omega - j116090\omega^3}, \quad (8.47)$$

a zatim prijenosnu funkciju $G_o(j\omega)$ zapišimo kao zbroj realnog i imaginarnog dijela:

$$\begin{aligned} G_o(j\omega) &= \frac{60K_R}{1 - 14549\omega^2 + j(304\omega - 116090\omega^3)} \cdot \frac{1 - 14549\omega^2 - j(304\omega - 116090\omega^3)}{1 - 14549\omega^2 - j(304\omega - 116090\omega^3)} \\ G_o(j\omega) &= \frac{60K_R(1 - 14549\omega^2)}{(1 - 14549\omega^2)^2 + (304\omega - 116090\omega^3)^2} - \frac{j60K_R(304\omega - 116090\omega^3)}{(1 - 14549\omega^2)^2 + (304\omega - 116090\omega^3)^2}. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Da bi sustav bio na rubu stabilnosti, na frekvenciji ω_π mora vrijediti da je

$\text{Re}\{G_o(j\omega_\pi)\} = -1$. Frekvenciju ω_π dobit ćemo iz uvjeta da je $\text{Im}\{G_o(j\omega_\pi)\} = 0$:

$$\begin{aligned}\text{Im}\{G_o(j\omega)\} &= \frac{j60K_R(304\omega - 116090\omega^3)}{(1 - 14549\omega^2)^2 + (304\omega - 116090\omega^3)^2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 304\omega - 116090\omega^3 &= 0 \Rightarrow \omega(304 - 116090\omega^2) = 0 \\ \omega_1 &= 0s^{-1} \\ 304 - 116090\omega^2 &= 0 \Rightarrow \omega_{2,3} = \pm 0.05117s^{-1}.\end{aligned}\quad (8.49)$$

Do sada smo već uvidjeli da je kandidat za ω_π frekvenciju uvijek bila strogo pozitivna frekvencija te stoga zaključujemo da je $\omega_\pi = 0.05117s^{-1}$. Prijenosna funkcija $G_o(j\omega)$ na frekvenciji ω_π ima vrijednost:

$$\begin{aligned}\text{Re}\{G_o(j\omega_\pi)\} &= \frac{60K_R(1 - 14549\omega_\pi^2)}{(1 - 14549\omega_\pi^2)^2 + (304\omega_\pi - 116090\omega_\pi^3)^2} \\ \text{Re}\{G_o(j\omega_\pi)\} &= \frac{60K_R}{1 - 14549\omega_\pi^2} = -1.6173K_R.\end{aligned}\quad (8.50)$$

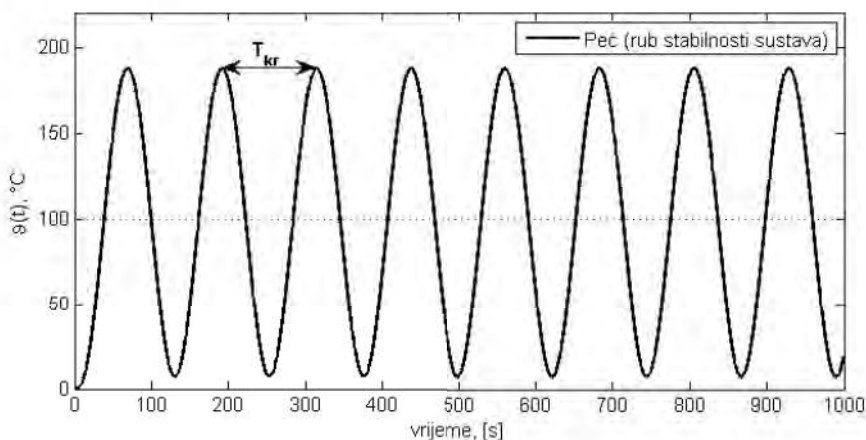
Sustav će biti na rubu stabilnosti ako je:

$$\text{Re}\{G_o(j\omega_\pi)\} = -1.6173K_R = -1 \Rightarrow K_{Rkr} = 0.6183. \quad (8.51)$$

Dobili smo kritično pojačanje K_{Rkr} koje nam je potrebno za određivanje parametara regulatora. Kritični period možemo izračunati koristeći frekvenciju ω_π ili mjerenjem na odzivu sustava s P regulatorom i kritičnim pojačanjem K_{Rkr} na referentnu vrijednost signala od 100 °C. Kritični period dobiven pomoću frekvencije ω_π je:

$$T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = 122.7836s. \quad (8.52)$$

Kritični period mogao se dobiti i mjerenjem na odzivu sustava na referentnu vrijednost signala (slika 8.31).



Slika 8.31: Sustav peći s grijačem u zatvorenom krugu (rub stabilnosti, $K_{Rkr} = 0.6183$)

Na slici 8.31 prikazan je odziv sustava peći s grijačem na rubu stabilnosti. Izračunajmo sada parametre P i PI regulatora koristeći Zigler-Nicholsovu metodu prema tablici 8.1.

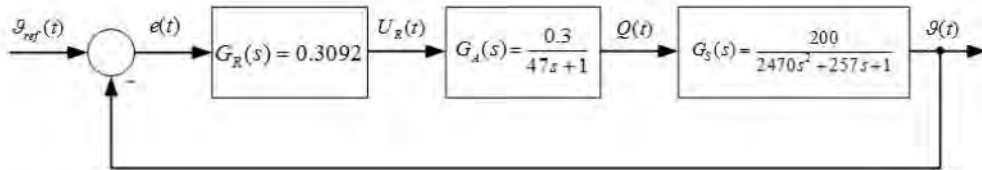
Za P regulator vrijedi:

$$\begin{aligned} K_R &= 0.5K_{Rkr} = 0.3092 \\ G_R(s) &= K_R = 0.3092. \end{aligned} \quad (8.53)$$

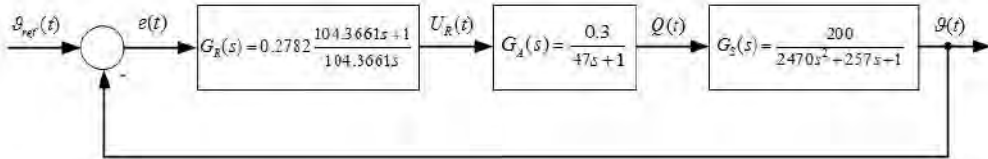
Za PI regulator vrijedi:

$$\begin{aligned} K_R &= 0.45K_{Rkr} = 0.2782, T_I = 0.85T_{kr} = 104.3661s \\ G_R(s) &= K_R \frac{T_I s + 1}{T_I s} = 0.2782 \frac{104.3661s + 1}{104.3661s}. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Na slici 8.32 prikazan je sustav peći i grijača s P regulatorom parametriranim prema Zigler-Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti, dok je na slici 8.33 prikazan sustav peći i grijača s PI regulatorom parametriranim prema Zigler-Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti.



Slika 8.32: Sustav peći i grijača s P regulatorom parametriranim prema Zigler-Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti u zatvorenom krugu automatskog upravljanja

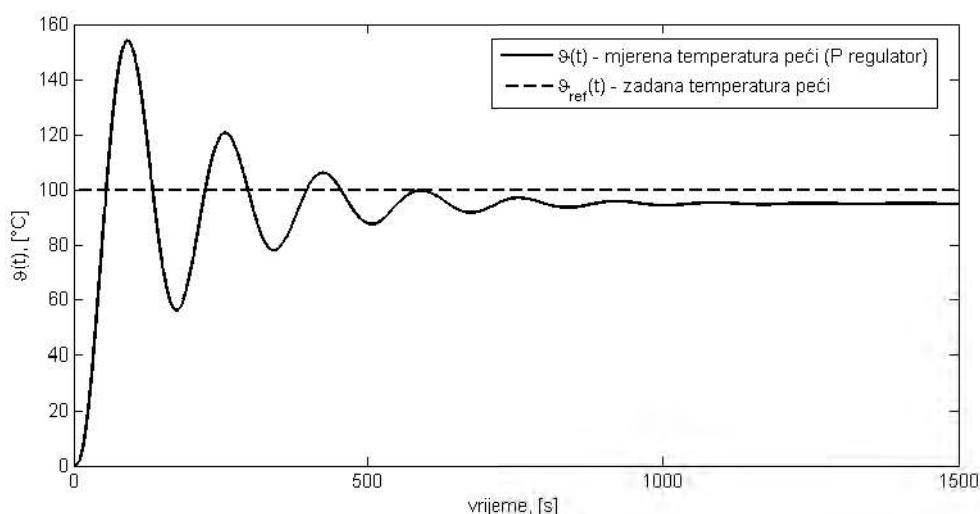


Slika 8.33: Sustav peći i grijača s PI regulatorom parametriranim prema Zigler-Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti u zatvorenom krugu automatskog upravljanja

U nastavku ćemo navesti niz odziva sustava peći u zatvorenom krugu automatskog upravljanja pri čemu će referentna veličina $\vartheta_{ref}(t)$ imati iznos 100 °C. Ako statički sustav opisan prijenosnom funkcijom otvorenog kruga (8.45) upravljamo P regulatorom, u stacionarnom će se stanju pojaviti statička pogreška koja se može iščitati sa slike 8.34 ili izračunati prema relaciji:

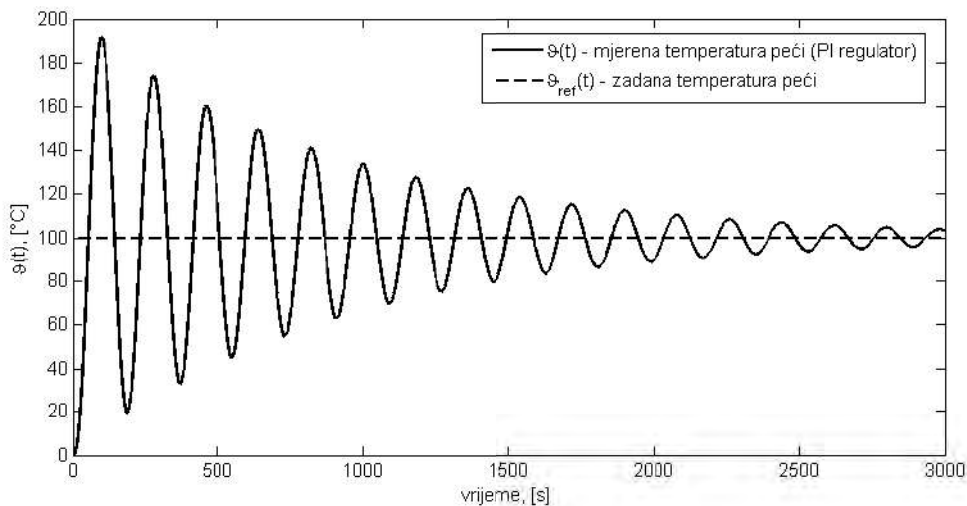
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G_O(s)} U(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{60K_R}{116090s^3 + 14549s^2 + 304s + 1}} \frac{100}{s} \bigg|_{K_R=0.3092} = 5.1146. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Odziv sustava upravljanog P regulatorom ima nadvišenje od 60.4% s obzirom na stacionarno stanje (slika 8.34), što je veliki iznos. U početku smo naveli kako regulator parametriran prema Ziegler-Nicholsu nije namijenjen dobrom slijeđenju referentne veličine, već dobrom vladanju s obzirom na poremećajnu veličinu. Iz tog razloga odziv sustava ima veliko nadvišenje.



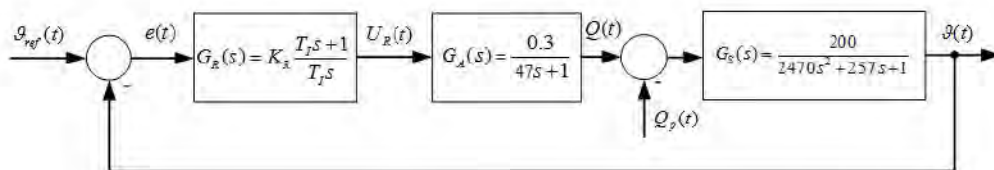
Slika 8.34: Odziv temperature peći upravljane P regulatorom parametriranom prema Ziegler-Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti ($K_R = 0.3092$)

S obzirom da ne želimo imati statičku pogrešku, koristit ćemo PI regulator koji će pomoću integratora u otvorenom krugu ukloniti statičku grešku. Odziv sustava peći upravljane PI regulatorom prikazan je na slici 8.35. Sa slike 8.35 možemo vidjeti da smo uklonili statičku pogrešku, ali sustav i dalje ima veliko nadvišenje od 88.15 %.



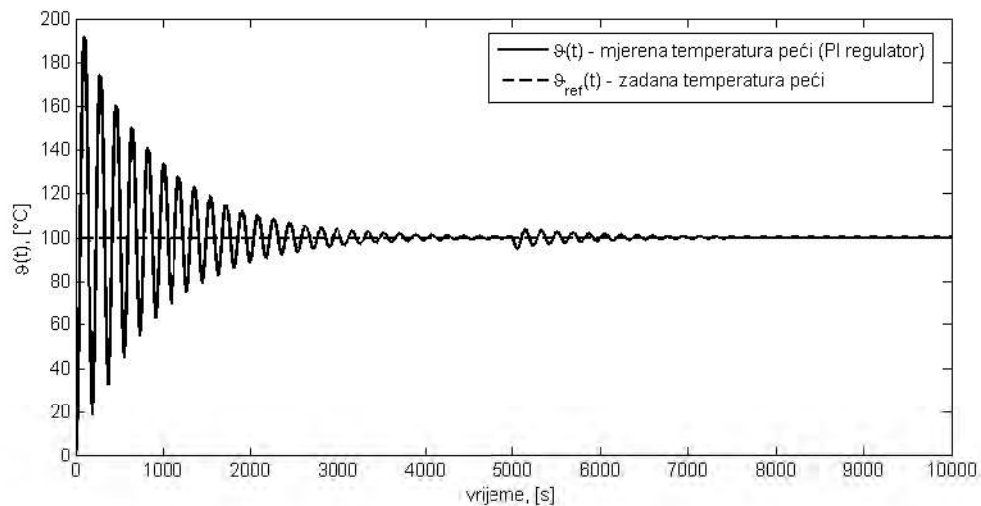
Slika 8.35: Odziv temperature peći upravljane PI regulatorom parametriranim prema Zigler-Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti ($K_R = 0.2782$, $T_I = 104.3661$ s)

Pokažimo sada da je regulator parametriran Ziegler-Nicholsovom metodom pogodan za uklanjanje utjecaja poremećajne veličine. U sustavu peći, jedan od mogućih poremećaja, gubitak je toplinskog toka zbog njezinog otvaranja. Blokovski prikaz sustava s poremećajnom veličinom $Q_p(t)$ prikazan je na slici 8.36.



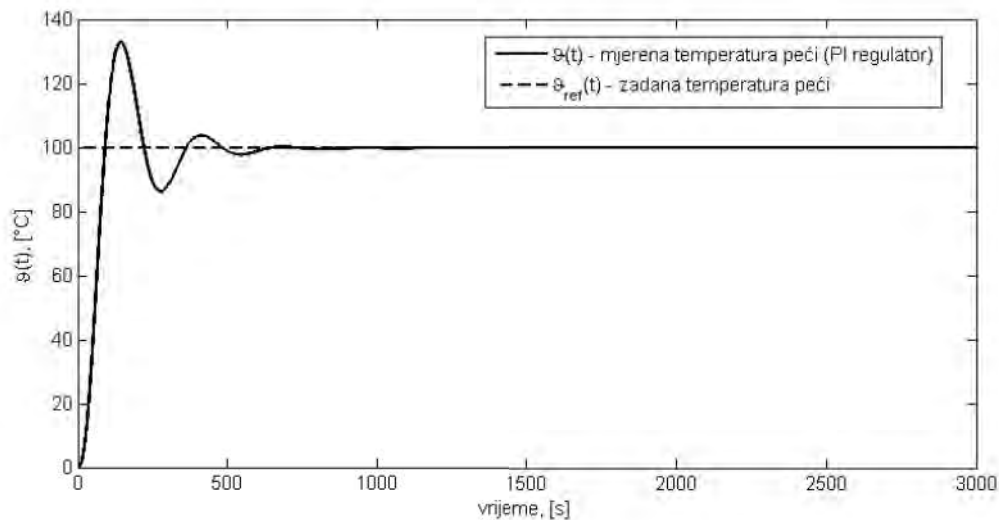
Slika 8.36: Sustav peći i grijača s PI regulatorom i djelovanjem poremećajne veličine $Q_p(t)$

Poremećajna veličina $Q_p(t)$ ulazi u sustav peći s negativnim predznakom (slika 8.36) kako bi se naglasio gubitak energije iz peći. Na slici 8.37 prikazan je odziv sustava na referentnu vrijednost uz djelovanje poremećajne veličine u trenutku $t = 5000$ s. U ovom je slučaju PI regulator brzo ispravio djelovanje poremećajne veličine što je i odlika regulatora parametriranog prema Ziegler-Nicholsovoj metodi.

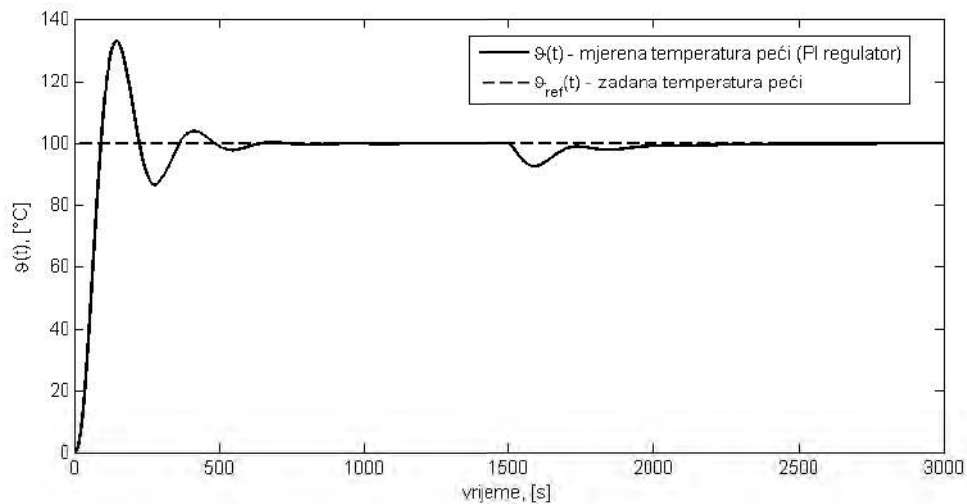


Slika 8.37: Odziv temperature peći upravljane PI regulatorom parametriziranim prema Ziegler-Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti pri djelovanju poremećaja ($K_R = 0.2782$, $T_I = 104.3661$ s)

Parametre dobivene Ziegler-Nicholsovom metodom možemo korigirati kako bismo dobili bolje vladanje sustava s obzirom na referentnu veličinu $\vartheta_{ref}(t)$. Ako sustav ima veliko nadvišenje, to znači da ima malo fazno osiguranje. U ovom poglavlju obradili smo Bodeov dijagram PI regulatora. Fazno osiguranje ćemo popraviti ako, s obzirom na Bodeovu karakteristiku PI regulatora, smanjimo vrijednost pojačanja K_R i povećamo vrijednost integralne vremenske konstante T_I .



Slika 8.38: Odziv temperature peći upravljane PI regulatorom parametriziranim prema Ziegler-Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti ($K_R = 0.1237$, $T_I = 306.9591$ s)



Slika 8.39: Odziv temperature peći upravljane PI regulatorom parametriranim prema Ziegler-Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti pri djelovanju poremećaja ($K_R = 0.1237$, $T_I = 306.9591$ s)

Na slici 8.38 prikazan je odziv temperature peći upravljane PI regulatorom s parametrima $K_R = 0.1237$ i $T_I = 306.9591$ s. Nadvišenje odziva temperature peći sada iznosi 32.9 %. Novim parametrima dobili smo bolje vladanje sustava s obzirom na referentnu vrijenost signala $\vartheta_{ref}(t)$. Što se sada dogodilo s vladanjem sustava s obzirom na poremećajnu veličinu?

Poboljšanjem vladanja sustava s obzirom na referentnu vrijenost signala $\vartheta_{ref}(t)$ pogoršali smo vladanje sustava s obzirom na poremećajnu veličinu, što je prikazano na slici 8.39. Poremećaj je nastao u vremenu $t = 1500$, a odziv je prvi puta dostigao stacionarnu vrijednost tek nakon 1000 s od trenutka djelovanja poremećaja. Ovim primjerom pokazali smo jedan od iskustvenih načina parametriranja P i PI regulatora. U nastavku ćemo obraditi Ziegler-Nicholovu metodu prijelazne funkcije.

8.8.2 Parametriranje regulatora Ziegler-Nicholsovom metodom prijelazne funkcije

Trajne oscilacije u sustavu mogu trajno oštetiti dijelove sustava te je stoga Ziegler-Nicholsova metoda ruba stabilnosti često neupotrebljiva. Pogodnija metoda za parametriranje regulatora je Ziegler-Nicholsova metoda prijelazne funkcije gdje je u sustavu potrebno odrediti samo prijelaznu funkciju i na temelju nje odrediti parametre regulatora [10], [20]. Snimanje prijelazne funkcije sustava $h(t)$ u većini slučajeva ne predstavlja poteškoće. Ziegler-Nicholsova metoda prijelazne funkcije za parametriranje regulatora može se primijeniti samo na sustave s aperiodskim odzivom. Na sustave s prigušenim oscilacijama nije moguće primijeniti Ziegler-Nicholovu metodu prijelazne funkcije za parametriranje regulatora. Prijelazna funkcija aperiodskog sustava aproksimira se pri-

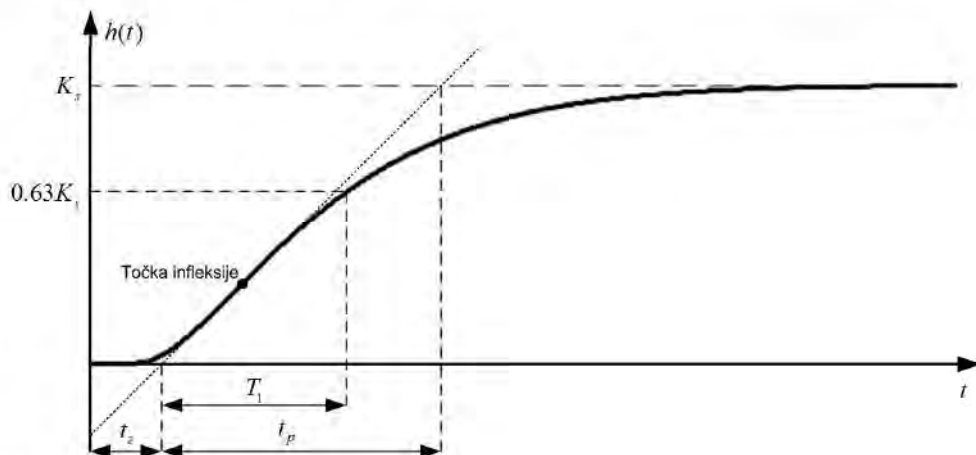
jelaznom funkcijom koju bi imao sustav s prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{Ts + 1} e^{-\tau s} \quad (8.56)$$

gdje je:

- K_s - pojačanje sustava
- T - vremenska konstanta
- τ - transportno kašnjenje ili mrtvo vrijeme.

Na slici 8.40 prikazana je prijelazna funkcija $h(t)$ sustava višeg reda s aperiodskim odzivom koji želimo upravljati regulatorom.



Slika 8.40: Prijelazna funkcija $h(t)$ sustava višeg reda s aperiodskim odzivom

Na temelju prijelazne funkcije sa slike 8.40 određujemo tri bitne veličine:

- pojačanje sustava K_s , koji je jednak stacionarnoj vrijednosti prijelazne funkcije $h(t)$ sustava
- vrijeme zadržavanja t_z , koje je određeno presjekom tangente u točki infleksije s vremenskom osi
- vrijeme porasta t_p , koje je određeno vremenom od presjeka tangente u točki infleksije s vremenskom osi do presjeka tangente sa stacionarnom vrijednošću prijelazne funkcije $h(t)$.

Točka infleksije je točka u kojoj je derivacija prijelazne funkcije $h(t)$ maksimalna (točka u kojoj je nagib prijelazne funkcije $h(t)$ najveći). Dakle, parametriranje regulatora Ziegler

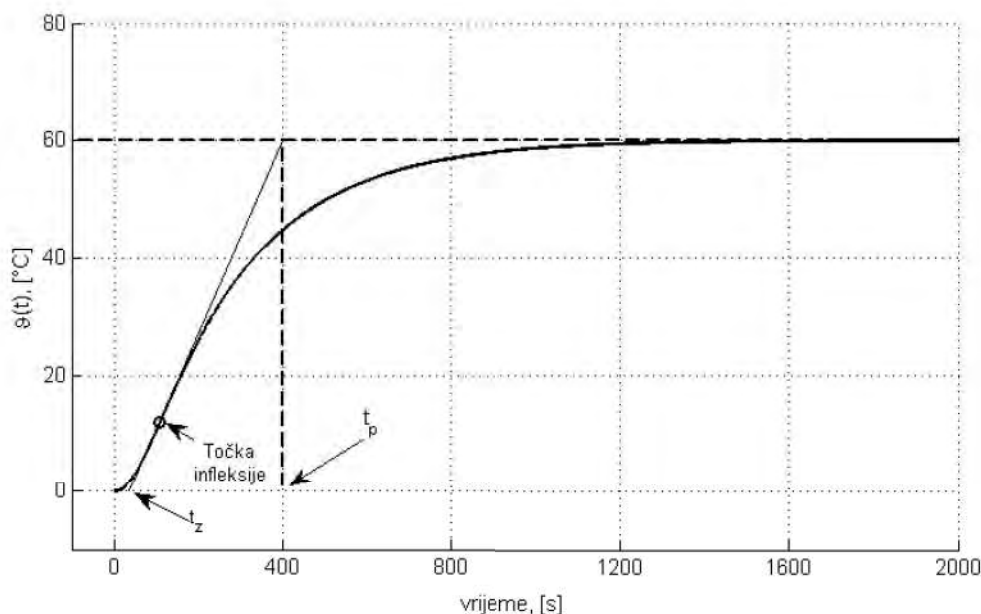
-Nicholsovom metodom prijelazne funkcije ovisi o nagibu tangente u točki infleksije $\frac{K_s}{t_p}$ i na vremenu zadržavanja t_z . Parametri regulatora, na temelju nagiba tangente u točki infleksije $\frac{K_s}{t_p}$ i na vremenu zadržavanja t_z , određuju se prema tablici 8.2.

Tablica 8.2: Parametri regulatora dobiveni Ziegler-Nicholsovom metodom prijelazne funkcije

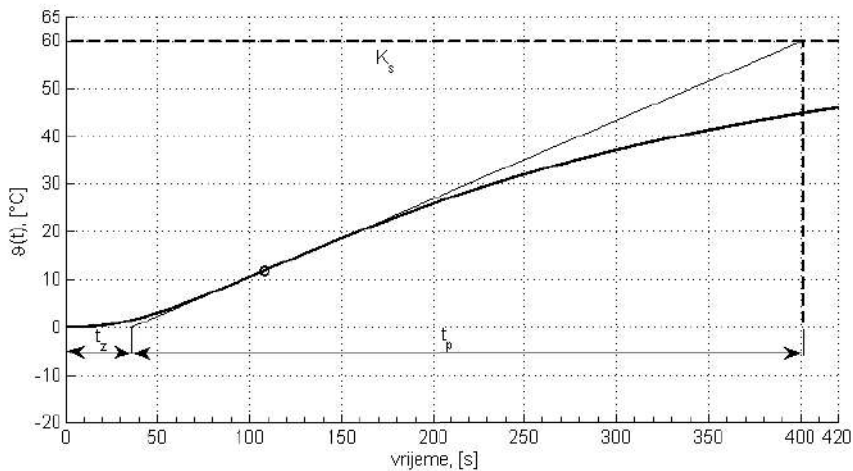
Tip Regulatora	K_R	T_I	T_D
P	$\frac{1}{K_s} \frac{t_p}{t_z}$	∞	0
PI	$\frac{0.9}{K_s} \frac{t_p}{t_z}$	$3.33t_z$	0
PID	$\frac{1.2}{K_s} \frac{t_p}{t_z}$	$2t_z$	$0.5t_z$

Pokušajmo sada Ziegler-Nicholsovom metodom prijelazne funkcije odrediti parametre regulatora koji će upravljati sustavom peći i grijača koji smo opisali u poglavlju *Ziegler-Nicholsova metoda ruba stabilnosti*. Prijenosna funkcija peći s grijačem je:

$$\begin{aligned} G_{AS}(s) &= G_A(s)G_S(s) = \frac{0.3}{47s+1} \frac{200}{2470s^2+257s+1} \\ G_{AS}(s) &= \frac{60}{116090s^3+14549s^2+304s+1}. \end{aligned} \quad (8.57)$$



Slika 8.41: Prijelazna funkcija sustava peći s grijačem



Slika 8.42: Prijelazna funkcija sustava peći s grijačem (uvećano)

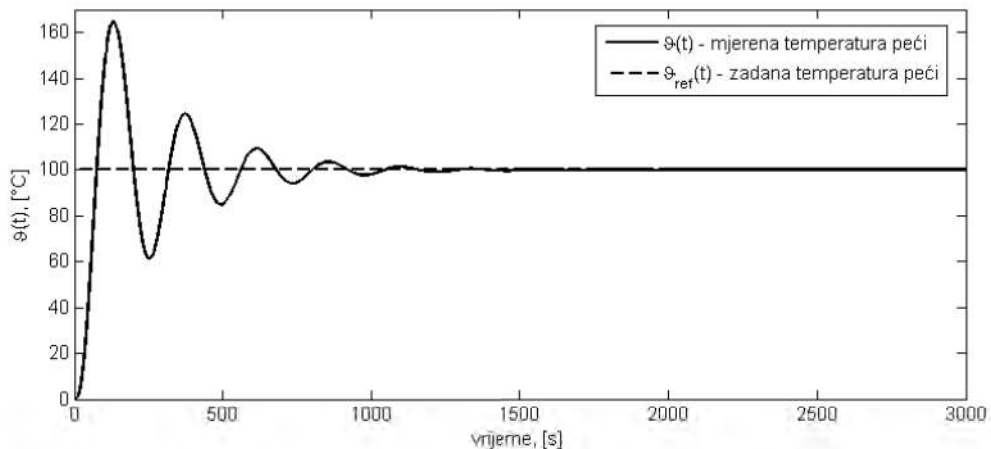
Prijelazna funkcija sustava zadanog prijenosnom funkcijom (8.57) prikazana je na slici 8.41. Na temelju prijelazne funkcije možemo iščitati potrebne parametre za određivanje parametara PI regulatora Ziegler-Nicholsovom metodom prijelazne funkcije. Uvećani odziv sustava na jediničnu skokovitu pobudu prikazan je na slici 8.42. S uvećanog odziva možemo iščitati sljedeće parametre: $K_s = 60$, $t_z = 35.12\text{s}$ i $t_p = 366.68\text{s}$. Koristeći tablicu 8.2 možemo odrediti parametre PI regulatora prema Ziegler-Nicholsovoj metodi prijelazne funkcije:

$$\begin{aligned} K_R &= \frac{0.9 t_p}{K_s t_z} = 0.157 \\ T_I &= 3.33 t_z = 116.95\text{s}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Sukladno parametrima (8.58), PI regulator ima prijenosnu funkciju:

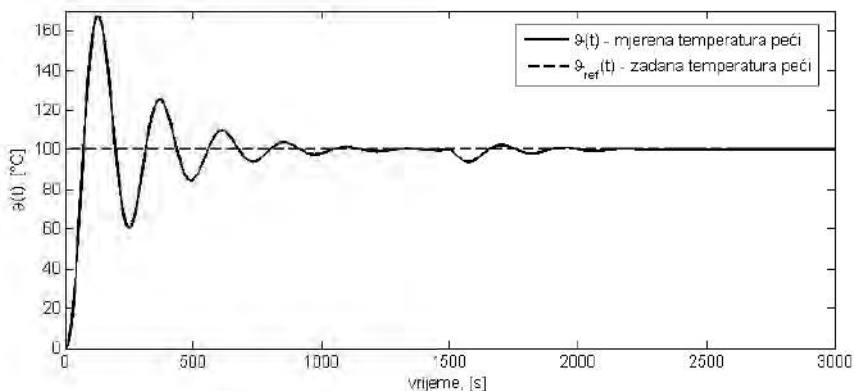
$$G_R(s) = 0.157 \frac{116.95s + 1}{116.95s}. \quad (8.59)$$

PI regulator upravlja sustavom peći s grijačem prema strukturi upravljanja prikazanoj na slici 8.36.



Slika 8.43: Odziv temperature peći upravljane PI regulatorom parametriziranim prema Zigler-Nicholsovoj metodi prijelazne funkcije ($K_R = 0.157$, $T_I = 116.95$ s)

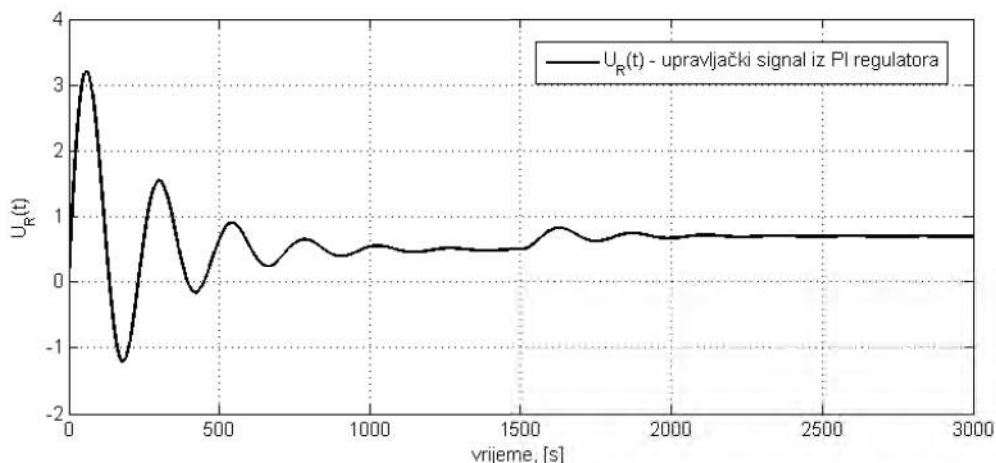
Odziv temperature peći upravljane PI regulatorom koji je parametriziran prema Zigler-Nicholsovoj metodi prijelazne funkcije, prikazan je na slici 8.43. Nadvišenje u sustavu ponovno je veliko i iznosi 66.79%. Već smo spomenuli da su Zigler-Nicholsove metode prilagođene dobrom vladanju sustava pri djelovanju poremećajne veličine, stoga slijedeće referentne veličine $\vartheta_{ref}(t)$ nije toliko kvalitetno jer se pojavljuje veliko nadvišenje u odzivu. Također, iz odziva sa slike 8.43 možemo zaključiti da PI regulator parametriziran prema Zigler-Nicholsovoj metodi prijelazne funkcije osigurava bolju kvalitetu odziva od onoga parametriziranog prema Zigler-Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti (slika 8.35).



Slika 8.44: Odziv temperature peći upravljane PI regulatorom parametriziranim prema Zigler-Nicholsovoj metodi prijelazne funkcije pri djelovanju poremećaja ($K_R = 0.157$, $T_I = 116.95$ s)

Na slici 8.44 prikazan je odziv sustava uslijed djelovanja poremećajne veličine $Q_p(t)$ koja djeluje u vremenu $t = 1500$ s. Vladanje sustava uslijed djelovanja poremećajne

veliĉine je zadovoljavajuće što je i odlika regulatora koji je parametriran prema Zigler-Nicholsovoj metodi prijelazne funkcije. Pogledajmo što se događa sa izlazom iz PI regulatora pri odzivu sustava sa slike 8.44.



Slika 8.45: Upravljački signal PI regulatora parametriran prema Zigler-Nicholsovoj metodi prijelazne funkcije pri djelovanju poremećaja ($K_R = 0.157$, $T_I = 116.95$ s)

S obzirom da je sustav peći s grijačem statički sustav, očekujemo da će upravljački signal iz PI regulatora postići stacionarnu vrijednost veću od nule kako bi se održavala temperatura pećnice. Održavanje stacionarne vrijednosti, iako nema regulacijskog odstupanja osigurava nam integrator PI regulatora. Na slici 8.45 prikazan je upravljački signal PI regulatora koji upravlja peći. Uslijed djelovanja poremećaja $Q_p(t)$ u vremenu $t = 1500$ s, upravljački signal podiže svoj iznos kako bi ispravio djelovanje poremećajne veličine. Sada je jasno zašto se kod upravljanja statičkog sustava P regulatorom pojavljuje regulacijska pogreška. S obzirom da u sustavu nema integratora koji bi zadržao vrijednost upravljačkog signala, upravljački signal stvara se zbog regulacijske pogreške jer se isti tvori množenjem koeficijenta pojačanja P regulatora K_R s regulacijskom pogreškom $e(t)$. Prema tome, da bi upravljački signal uopće postojao, mora postojati i regulacijska pogreška. Ovime smo završili parametriranje regulatora prema iskustvenim metodama Zigler-Nicholsa.

8.9 Parametriranje regulatora metodom tehničkog optimuma

Često korištena praktična metoda parametriranja regulatora je metoda tehničkog optimuma [10]. Metoda tehničkog optimuma koristi se kod sustava koji nemaju astatizam (sustavi koji nemaju integralno djelovanje). Ova metoda zasniva se na zahtjevima da sustav ima brz odziv i približno aperiodski odziv sustava upravljanja. Dakle, za razliku

od metoda Ziegler-Nicholsa, tehnički se optimum koristi kod upravljanja sustava kod kojeg želimo postići dobro slijedenje referentne veličine $y_{ref}(t)$. Ako se sustavom upravlja PI regulatorom koji je parametriran prema tehničkom optimumu, tada će prijelazna funkcija sustava biti približno ista prijelaznoj funkciji sustava opisanog PT2S članom:

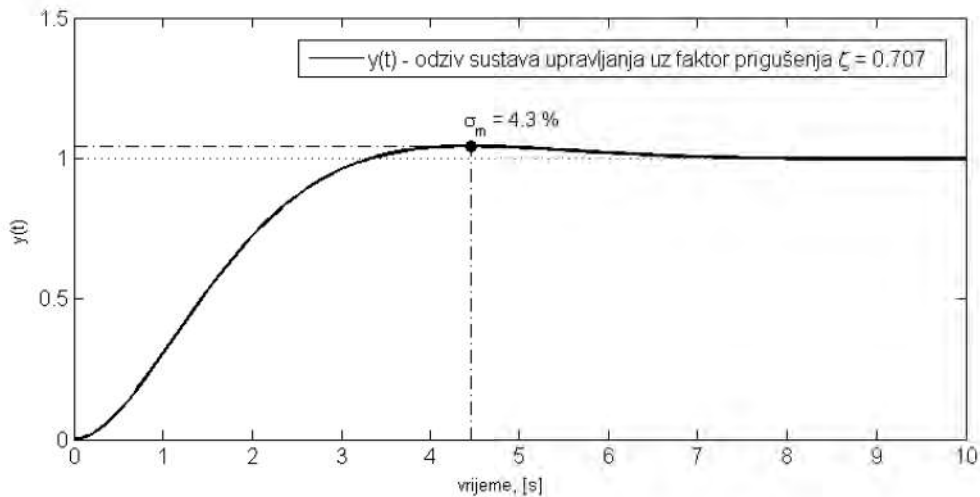
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (8.60)$$

Da bi sustav upravljanja imao brz odziv i približno aperiodski odziv, odabire se tehnički optimalan faktor prigušenja $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sustav koji ima faktor prigušenja $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ ima nadvišenje od 4.3%. Odziv sustava koji ima faktor prigušenja $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ prikazan je na slici 8.46.

Tehnički optimum najčešće se koristi kod parametriranja PI regulatora i pretpostavlja strukturu sustava opisanu prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{T_1 s + 1} \frac{1}{T_2 s + 1} \frac{1}{T_3 s + 1} \cdots \frac{1}{T_n s + 1}, \quad (8.61)$$

pri čemu je T_1 dominantna vremenska konstanta, a T_2, T_3, \dots, T_n nedominantne vremenske konstante.



Slika 8.46: Odziv sustava s faktorom prigušenja $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\omega_n = 1 \text{ s}^{-1}$

Dominantna vremenska konstanta je ona konstanta za koju vrijedi da je $T_1 \gg T_2, T_3, \dots, T_n$. Vremenska se konstanta naziva dominantnom ako se cijeli sustav upravljanja ponaša približno PT1 članu, gdje je T_1 dominantna vremenska konstanta. Definirajmo zbroj nedominantnih vremenskih konstanti:

$$T_\Sigma = T_2 + T_3 + \dots + T_n. \quad (8.62)$$

Ako vrijedi da je $T_1 > (5 \div 10)T_\Sigma$, tada se prijenosne funkcije s nedominantnim vremenskim konstantama mogu aproksimirati sljedećim izrazom:

$$\frac{1}{T_2s+1} \frac{1}{T_3s+1} \cdots \frac{1}{T_ns+1} \approx \frac{1}{(T_2+T_3+\dots+T_n)s+1} = \frac{1}{T_\Sigma s+1}. \quad (8.63)$$

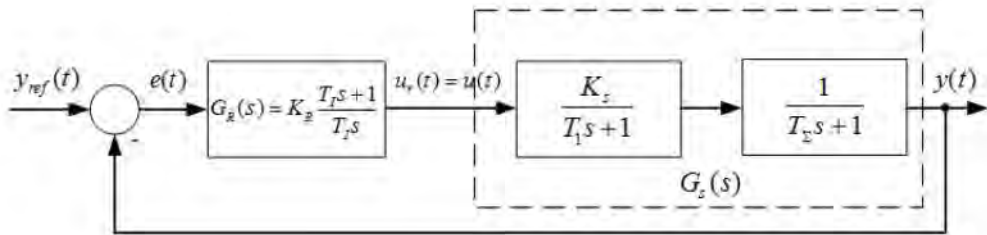
Sustav opisan prijenosnom funkcijom (8.61), uz uvjet $T_1 > (5 \div 10)T_\Sigma$, možemo aproksimirati prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) \approx \frac{K_s}{T_1s+1} \frac{1}{T_\Sigma s+1}. \quad (8.64)$$

Kod sustava drugog reda nije potrebno zadovoljiti uvjet $T_1 > (5 \div 10)T_\Sigma$ jer postoji samo jedna vremenska konstanta koja nije dominantna. Prijenosna funkcija PI regulatora je:

$$G_R(s) = K_R \frac{T_I s + 1}{T_I s}. \quad (8.65)$$

Sustav, aproksimiran prijenosnom funkcijom (8.64), koristimo u sintezi PI regulatora i zatvorenog kruga upravljanja prikazanog na slici 8.47.



Slika 8.47: Zatvoreni krug automatskog upravljanja pri sintezi metodom tehničkog optimuma

Napravimo sada sintezu zatvorenog kruga automatskog upravljanja prikazanog slikom 8.47. Integralnom vremenskom konstantom kompenzirat ćemo dominantnu vremensku konstantu tako da odaberemo:

$$T_I = T_1. \quad (8.66)$$

Otvoreni krug automatskog upravljanja prema slici 8.47 nakon supstitucije $T_I = T_1$ ima oblik:

$$\begin{aligned} G_o(s) &= G_R(s)G_s(s) = K_R \frac{T_I s + 1}{T_I s} \frac{K_s}{T_1 s + 1} \frac{1}{T_\Sigma s + 1} \Big|_{T_I=T_1} \\ G_o(s) &= K_R \frac{T_I s + 1}{T_I s} \frac{K_s}{T_I s + 1} \frac{1}{T_\Sigma s + 1} = \frac{K_R K_s}{T_I s (T_\Sigma s + 1)}. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Zatvoreni krug automatskog upravljanja mora zadovoljavati prijenosnu funkciju (8.60) te mora vrijediti da je faktor prigušenja $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Prijenosna funkcija zatvorenog kruga upravljanja s obzirom na prijenosnu funkciju otvorenog kruga upravljanja (8.67) je:

$$G_z(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{\frac{K_R K_s}{T_I s(T_\Sigma s + 1)}}{1 + \frac{K_R K_s}{T_I s(T_\Sigma s + 1)}} = \frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma s^2 + T_I s + K_R K_s}. \quad (8.68)$$

Zapišimo prijenosnu funkciju zatvorenog kruga (8.68) u obliku pogodnom za usporedbu s prijenosnom funkcijom (8.60):

$$G_z(s) = \frac{\frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma}}{s^2 + \frac{1}{T_\Sigma} s + \frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma}}. \quad (8.69)$$

Izjednačimo sada prijenosne funkcije (8.60) i (8.69):

$$\frac{\frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma}}{s^2 + \frac{1}{T_\Sigma} s + \frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (8.70)$$

Na temelju relacije (8.70), možemo zapisati:

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{T_\Sigma}, \omega_n^2 = \frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma}. \quad (8.71)$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma}} \\ 2\zeta\omega_n &= 2\zeta\sqrt{\frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma}} = \frac{1}{T_\Sigma}. \end{aligned} \quad (8.72)$$

U izraz (8.72) uvrstimo uvjet za tehnički optimum, odnosno $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ te izračunamo koeficijent pojačanja PI regulatora K_R :

$$\begin{aligned} 2\zeta\sqrt{\frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma}} &= \frac{1}{T_\Sigma} \Rightarrow 2\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma}} = \frac{1}{T_\Sigma} /^2 \\ 2\frac{K_R K_s}{T_I T_\Sigma} &= \frac{1}{T_\Sigma^2} \Rightarrow K_R = \frac{1}{2} \frac{1}{K_s} \frac{T_I}{T_\Sigma}. \end{aligned} \quad (8.73)$$

Dakle, parametri PI regulatora, prema tehničkom optimumu, računaju se prema relacijama:

$$\begin{aligned} T_I &= T_1 \\ K_R &= \frac{1}{2} \frac{1}{K_s} \frac{T_1}{T_\Sigma} \end{aligned} \quad (8.74)$$

gdje su:

- T_1 - dominantna vremenska konstanta sustava

- T_{Σ} - suma nedominantnih vremenskih konstanti sustava
- K_s - statičko pojačanje sustava.

Napravimo sintezu zatvorenog kruga peći i grijača s prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{0.2}{16s + 1} \frac{400}{2470s^2 + 257s + 1}. \quad (8.75)$$

Sustav (8.75) zapišimo u obliku umnožaka PT1 članova:

$$G_s(s) = \frac{80}{247s + 1} \frac{1}{16s + 1} \frac{1}{10s + 1} \quad (8.76)$$

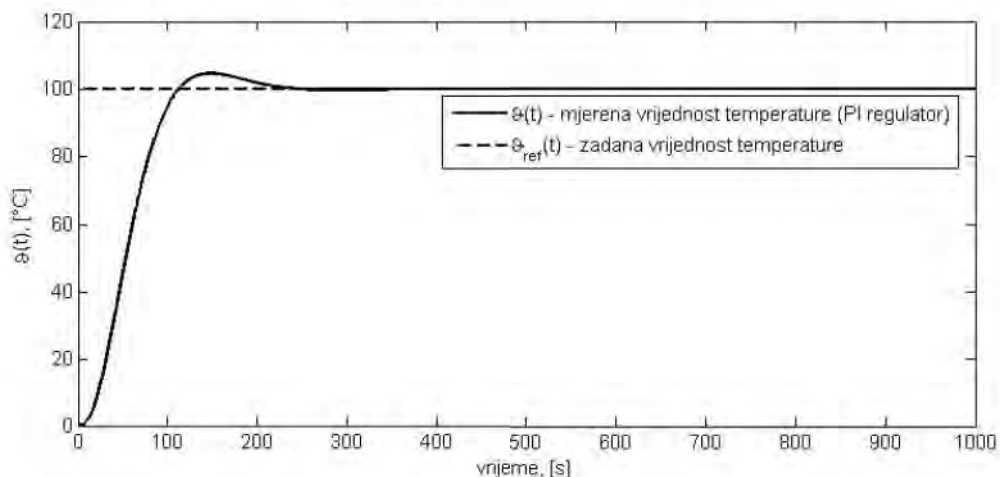
pri čemu su vremenske konstante redom: $T_1 = 247s$, $T_2 = 16s$ i $T_3 = 10s$. Dominantna vremenska konstanta u sustavu (8.76) je $T_1 = 247s$, dok je suma nedominantnih vremenskih konstanti $T_{\Sigma} = T_2 + T_3 = 26s$. Zadovoljen je uvjet $T_1 > (5 \div 10)T_{\Sigma}$, odnosno $247 > (130 \div 260)$. Pojačanje sustava je $K_s = 80$.

Prema izrazu (8.74) za parametre PI regulatora slijedi:

$$\begin{aligned} T_I &= T_1 = 247s \\ K_R &= \frac{1}{2} \frac{1}{K_s} \frac{T_1}{T_{\Sigma}} = \frac{1}{2} \frac{1}{80} \frac{247}{26} = 0.0594. \end{aligned} \quad (8.77)$$

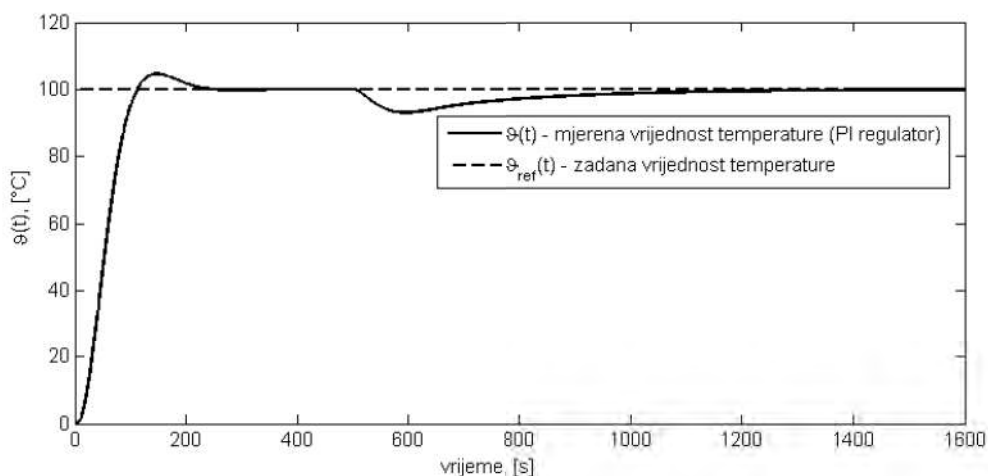
PI regulator parametriran prema tehničkom optimumu za sustav opisan prijenosnom funkcijom (8.75) je:

$$G_R(s) = 0.0594 \frac{247s + 1}{247s}. \quad (8.78)$$



Slika 8.48: Odziv temperature peći upravljane PI regulatorom parametriranom prema tehničkom optimumu ($K_R = 0.0594$, $T_I = 247s$)

Odziv temperature peći upravljane PI regulatorom koji je parametriran prema tehničkom optimumu prikazan je na slici 8.48. Nadvišenje u sustavu je svega 4.54% što je mali iznos nadvišenja. Nadvišenje nije jednako 4.3% kao što smo pretpostavili jer smo radili aproksimaciju dviju nedominantnih vremenskih konstanti njihovom sumom. Za razliku od Zigler-Nicholsovih metoda parametriranja regulatora, metoda tehničkog optimuma prilagođena je dobrom slijeđenju referentne veličine $\vartheta_{ref}(t)$. Odziv sustava peći je brz i s malim nadvišenjem što se može vidjeti sa slike 8.48. Ako na sustav peći djeluje poremećaj, tada PI regulator parametriran metodom tehničkog optimuma otklanja utjecaj poremećaja vrlo sporo što je prikazano na slici 8.49. Na istoj se slici vidi kako je poremećaj nastao u vremenu $t = 500\text{s}$, a kako je poremećaj ispravljen tek nakon više od 1000 s.



Slika 8.49: Odziv temperature peći upravljane PI regulatorom parametriranom prema tehničkom optimumu pri djelovanju poremećaja ($K_R = 0.0594$, $T_I = 247\text{ s}$)

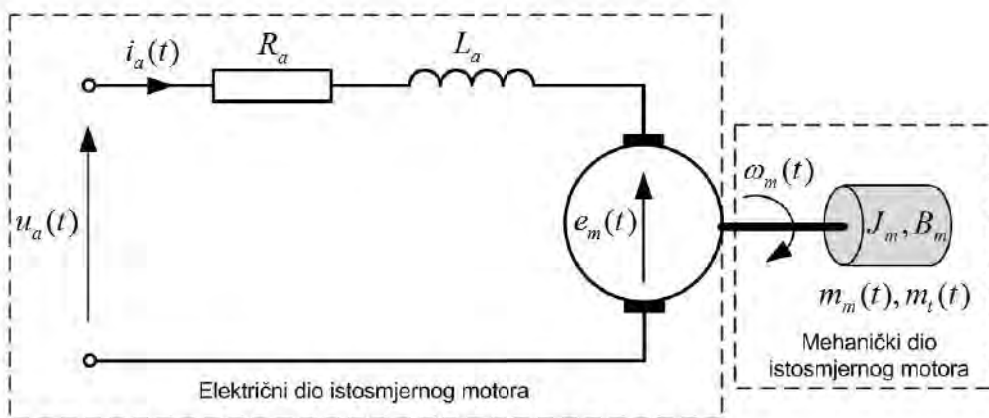
Ovim primjerom završili smo s metodama parametriranja regulatora u ovoj knjizi. Obradili smo dvije metode parametriranja regulatora. Prva je metoda bila iskustvena metoda Ziegler-Nicholsa koja se koristi kako bi se osiguralo dobro vladanje pri djelovanju poremećaja, a druga metoda je tehnički optimum koji se koristi kako bi se ostvarilo dobro slijeđenje referentne vrijednosti signala. Koju od metoda ćete koristiti, ovisi o zahtjevima u sustavu automatskog upravljanja.

8.10 Kaskadni sustav upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog motora s permanentnim magnetima

Istosmjerni motor s permanentnim magnetima predstavlja elektromehanički pretvarač koji električnu energiju pretvara u mehaničku. Sustav istosmjernog motora sastoji se od električnog i mehaničkog dijela. Električni dio vezan je za namot armature motora, a mehanički dio za rotor motora koji može pokretati neki mehanički uređaj. Istosmjerni motori su vrlo jednostavni za upravljanje što ćemo pokazati u nastavku. Upravljanje brzinom vrtnje bit će realizirano na laboratorijskom primjeru istosmjernog motora s permanentnim magnetima.

8.10.1 Matematički model istosmjernog motora s permanentnim magnetima

Matematički model istosmjernog motora s permanentnim magnetima dobit ćemo poznavanjem fizikalnih pojava koje se događaju prilikom elektromehaničke pretvorbe u samom motoru [21], [22]. Nadomjesna shema istosmjernog motora s permanentnim magnetima za potrebe izvođenja matematičkog modela istosmjernog motora s permanentnim magnetima prikazana je na slici 8.49.



Slika 8.50: Nadomjesna shema istosmjernog motora s permanentnim magnetima

Električni dio istosmjernog motora, odnosno armaturni krug, možemo modelirati sljedećom diferencijalnom jednačbom:

$$u_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_m(t) \quad (8.79)$$

gdje su:

- $u_a(t)$ napon armature istosmjernog motora, [V]
- $i_a(t)$ struja armature istosmjernog motora, [A]
- $e_m(t)$ protuelektromotorna sila, [V]
- $R_a(t)$ otpor armature istosmjernog motora, [Ω]
- $L_a(t)$ induktivitet armature istosmjernog motora, [H].

Dakle, napon armature $u_a(t)$ jednak je zbroju svih padova napona u istosmjernom motoru. Otpor armature R_a i induktivitet armature L_a pojavljuju se zbog namota bakrene žice u krugu armature motora. Protuelektromotorna sila je napon koji se inducira u namotu armature zbog vrtnje osovine (rotora) motora i proporcionalna je brzini vrtnje motora:

$$e_m(t) = k_e \omega_m(t) \quad (8.80)$$

gdje su:

- $\omega_m(t)$ brzina vrtnje istosmjernog motora, [V]
- k_e naponska konstanta istosmjernog motora, [$\frac{Vs}{rad}$]
- $m_m(t)$ moment tereta istosmjernog motora, [Nm].

Naponska konstanta istosmjernog motora ovisi o konstrukciji samog motora i magnetskom toku u namotu. Magnetski tok i struja armature uzrokuju vrtnju rotora motora zbog zakretnog momenta koji stvaraju, a koji se može izraziti kao:

$$m_m(t) = k_m i_a(t) \quad (8.81)$$

gdje je:

- k_m momentna konstanta istosmjernog motora, [$\frac{Nm}{A}$].

Momentna i naponska konstanta motora jednake su po iznosu, iako su im mjerne jedinice različite. Moment motora je, prema relaciji (8.81), proporcionalan struji armature. Relacija (8.81) predstavlja elektromehaničku pretvorbu. Na osovinu motora možemo postaviti jednadžbu dinamičke ravnoteže momenata:

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = m_m(t) - m_t(t) - B_m \omega_m(t) \quad (8.82)$$

gdje su:

- J_m moment inercije rotora istosmjernog motora, $[\text{kgm}^2]$
- B_m koeficijent viskoznog trenja, $[\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}]$.

Relacijama (8.79), (8.80), (8.81) i (8.82) opisan je matematički model istosmjernog motora s permanentnim magnetima pomoću linearnih diferencijalnih jednadžbi.

Laplaceovom transformacijom relacije (8.79) dobit ćemo:

$$U_a(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + E_m(s). \quad (8.83)$$

Iz relacije 8.83 izrazimo prijenosnu funkciju armaturnog kruga istosmjernog motora:

$$U_a(s) - E_m(s) = I_a(s) (L_a s + R_a) \Rightarrow \frac{I_a(s)}{U_a(s) - E_m(s)} = \frac{1}{L_a s + R_a} = \frac{\frac{1}{R_a}}{\frac{L_a}{R_a} s + 1} = \frac{K_a}{T_a s + 1}. \quad (8.84)$$

Prema prijenosnoj funkciji armaturnog kruga istosmjernog motora (8.84), pojačanje armaturnog kruga istosmjernog motora K_a je $\frac{1}{R_a}$, a vremenska konstanta armaturnog kruga istosmjernog motora T_a je $\frac{L_a}{R_a}$. S obzirom da je induktivitet armature istosmjernog motora mali po iznosu, armaturni krug ima brzu dinamiku. Nadalje, Laplaceovom transformacijom relacije (8.80) dobit ćemo:

$$E_m(s) = k_e \Omega_m(s), \quad (8.85)$$

a Laplaceovom transformacijom relacije (8.81) dobit ćemo:

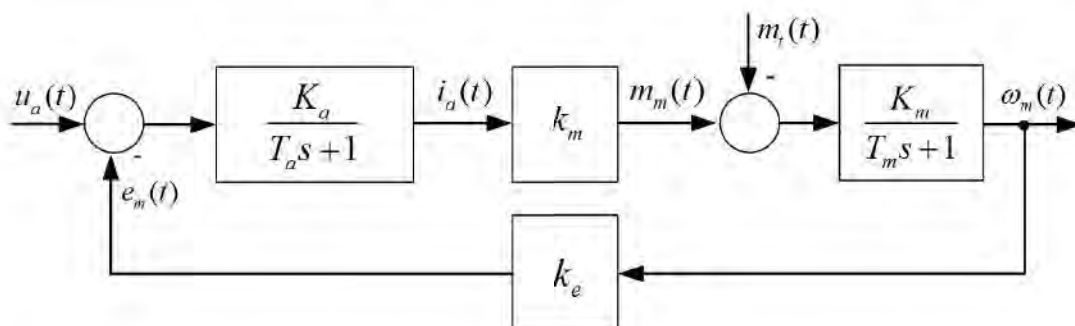
$$M_m(s) = k_m I_a(s). \quad (8.86)$$

Ostaje nam još samo napraviti Laplaceovu transformaciju relacije (8.82):

$$J_m s \Omega_m(s) = M_m(s) - M_t(s) - B_m \Omega_m(s) \Rightarrow \Omega_m(s) = \frac{1}{J_m s + B_m} (M_m(s) - M_t(s))$$

$$\Omega_m(s) = \frac{\frac{1}{B_m}}{\frac{J_m}{B_m} s + 1} (M_m(s) - M_t(s)) = \frac{K_m}{T_m s + 1} (M_m(s) - M_t(s)). \quad (8.87)$$

Konstanta T_m predstavlja mehaničku vremensku konstantu. Relacijama (8.84), (8.85), (8.86) i (8.87) opisan je matematički model istosmjernog motora s permanentnim magnetima pomoću Laplaceove transformacije. Temeljem navedenih relacija kreirat ćemo blokovski prikaz sustava istosmjernog motora s permanentnim magnetima prikazan na slici 8.51.

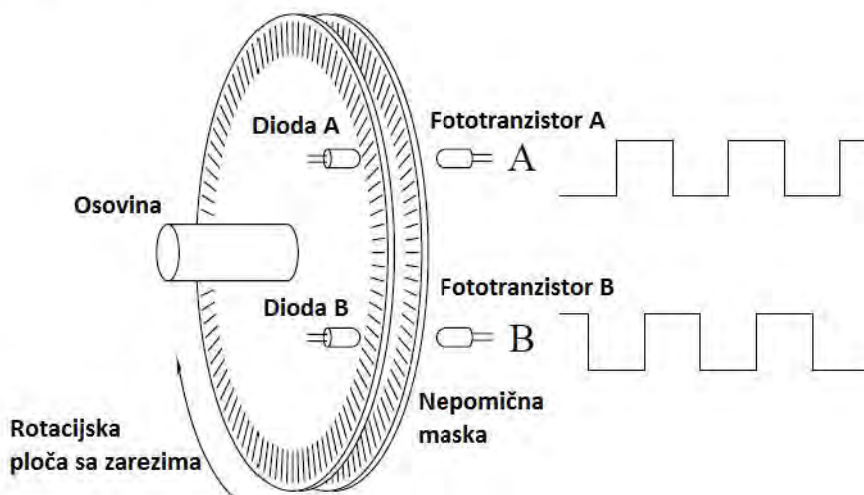


Slika 8.51: Blokovska shema istosmjernog motora s permanentnim magnetima

Blokovsku shemu istosmjernog motora s permanentnim magnetima koristit ćemo dalje u sintezi sustava automatskog upravljanja. Da bismo upravljali brzinom vrtnje istosmjernog motora, potrebno je mjeriti brzinu vrtnje. Mjerenje ćemo izvesti pomoću inkrementalnog enkodera koji ćemo opisati u nastavku.

8.10.2 Mjerenje brzine vrtnje korištenjem inkrementalnog enkodera

Da bismo upravljali nekom veličinom u sustavu, potrebno ju je mjeriti. Brzinu vrtnje mjerit ćemo inkrementalnim enkoderom. Princip rada inkrementalnog enkodera može se objasniti pomoću slike 8.52, [19].



Slika 8.52: Princip rada inkrementalnog enkodera

Rotacijska ploča sa zarezima okreće se zajedno s osovinom enkodera koja je spojena na osovinu motora. Ispred rotacijske ploče nalaze se dvije LED diode koje emitiraju svjetlost. Svjetlosni snop prolazi kroz rotacijsku ploču na mjestima gdje se nalaze zarezi.

Iza rotacijske ploče sa zarezima nalazi se maska kroz koju emitirana svjetlost prolazi prema fototranzistorima. Svaki put kada emitirana svjetlost prođe kroz zarez rotacijske ploče na bazu fototranzistora, generira se po jedan impuls. Okretanjem osovine enkodera generira se niz impulsa na fototranzistoru. Broj zarezova (impulsa) po okretaju na rotacijskoj ploči označavat ćemo sa N_z . Rezoluciju enkodera definiramo kao omjer broja zarezova (impulsa) N_z i 360° :

$$r = \frac{N_z}{360^\circ} \left[\frac{\text{imp}}{^\circ} \right]. \quad (8.88)$$

Brzina vrtnje istosmjernog motora rezultira generiranjem niza impulsa u jedinici vremena. Broj generiranih impulsa $N(t)$ u jednoj sekundi jednak je broju okretaja osovine motora $n(t)$ u jednoj sekundi, množeno s brojem impulsa po jednom okretu:

$$N(t) = n(t)N_z. \quad (8.89)$$

Jedan okretaj jednak je 2π rad pa ćemo relaciju (8.89) zapisati pomoću brzine vrtnje motora $\omega_m(t)$:

$$N(t) = \frac{N_z}{2\pi} \omega_m(t). \quad (8.90)$$

Na temelju mjerenog broja impulsa u sekundi $N(t)$ mjerenu brzinu vrtnje motora $\omega_{mm}(t)$ izračunat ćemo prema relaciji:

$$\omega_{mm}(t) = \frac{2\pi}{N_z} N(t). \quad (8.91)$$

Izvedene relacije za mjerenu brzinu vrtnje, korisne su prilikom izvedbe realnog sustava upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog motora pomoću diskretnog regulatora. U svrhu simulacije sustava i radi jednostavnosti sinteze regulatora, izvedimo na temelju prethodnih relacija izraz za mjerenu brzinu vrtnje:

$$\omega_{mm}(t) = \frac{2\pi}{N_z} N(t) = \frac{2\pi}{N_z} \frac{N_z}{2\pi} \omega_m(t) = \omega_m(t). \quad (8.92)$$

Prema relaciji (8.92) primijetimo da se radi o sustavu s jediničnom povratnom vezom.

8.10.3 DC-DC pretvarač u funkciji aktuatora

Statička jednadžba armaturnog kruga istosmjernog motora na temelju relacije (8.83) je:

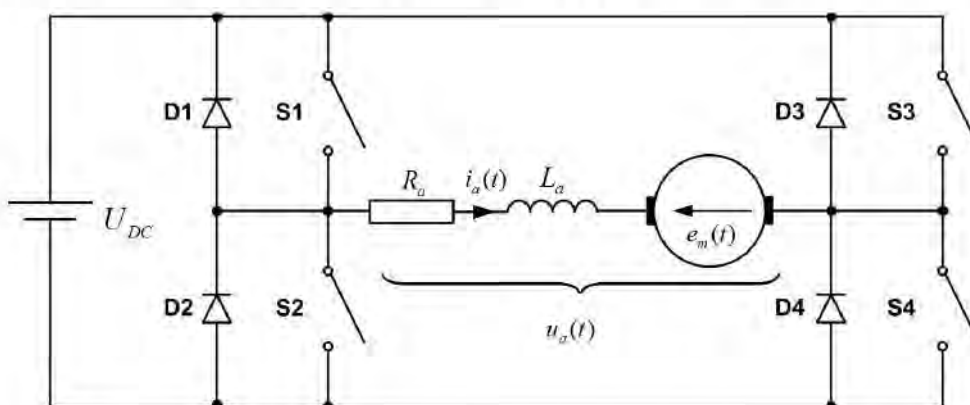
$$\lim_{s \rightarrow 0} U_a(s) = I_a(s) (L_a s + R_a) + E_m(s) \Rightarrow$$

$$U_a = I_a R_a + E_m = \frac{M_m}{k_m} R_a + k_e \Omega_m \quad (8.93)$$

pri čemu se brzina vrtnje može izračunati prema relaciji:

$$\Omega_m = \frac{U_a - \frac{M_m}{k_m} R_a}{k_e}. \quad (8.94)$$

Dakle, prema relaciji (8.94), brzina vrtnje pri konstantnom momentu može se mijenjati jedino promjenom istosmjernog napona U_a . Da bismo održavali konstantan moment M_m na osovini motora, struja armature istosmjernog motora I_a mora biti konstantna. Prema tome, aktuator kojim ćemo dozirati energiju u sustav istosmjernog motora mora osigurati konstantnu vrijednost struje armature istosmjernog motora I_a . U tu svrhu koristit ćemo upravljivi H most s MOSFET tranzistorima.



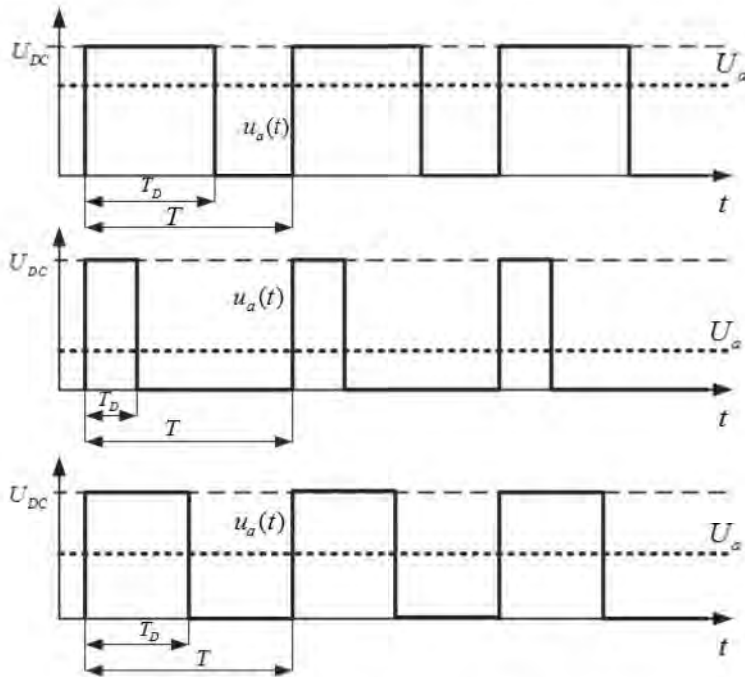
Slika 8.53: Princip rada H mosta (DC-DC pretvarač)

Upravljivi H most prikazan je na slici 8.53 [23]. Pomoću njega ćemo generirati PWM signal (engl. *Pulse Width Modulation*). Prije samog opisa rada H mosta, objasniti ćemo PWM signal. Na slici 8.54 prikazan je PWM signal koji je periodičan pravokutni signal visoke frekvencije koji se može na periodu T opisati relacijom:

$$u_a(t) = \begin{cases} U_{DC} & \text{za } 0 \leq t < T_D \\ 0 & \text{za } T_D \leq t < T \end{cases} \quad (8.95)$$

gdje su:

- U_{DC} - napon istosmjernog izvora napajanja, [V]
- T - period PWM signala, [s]
- T_D - vrijeme visokog stanja PWM signala (engl. *Duty Cycle*), [s].



Slika 8.54: PWM signal

Ako istosmjerni motor spojimo na aktuator koji generira PWM signal, struja istosmjernog motora, zbog induktiviteta armaturnog namota, ne može slijediti brze promjene napona armature $u_a(t)$ sa slike 8.54, ako je period PWM signala T za barem deset puta manji od vremenske konstante armaturnog kruga istosmjernog motora T_a . Zbog toga se u ovom slučaju istosmjerni motor ponaša kao da je spojen na istosmjerni napon U_a . Napon U_a , prikazan je na slici 8.54 i jednak je srednjoj vrijednosti signala $u_a(t)$:

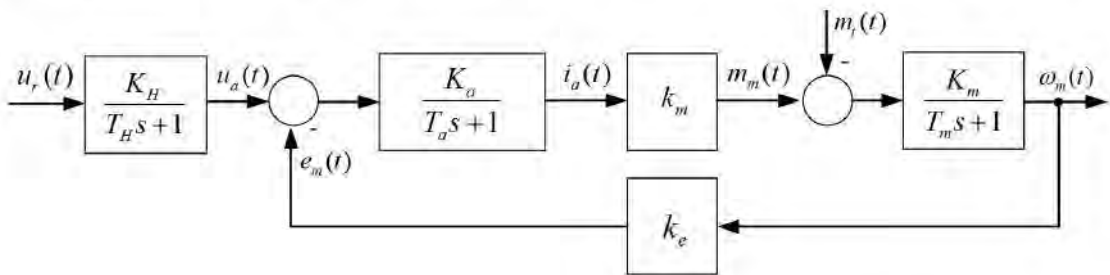
$$\begin{aligned} U_a &= \frac{1}{T} \int_0^T u_a(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T_D} U_{DC} dt + \int_{T_D}^T 0 dt \right) \Rightarrow \\ U_a &= \frac{T_D}{T} U_{DC}. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Srednja vrijednost napona armature U_a proporcionalna je s vremenom visokog stanja PWM signala T_D . Prema tome, promjenom vremena visokog stanja PWM signala T_D , mijenjamo i srednju vrijednost napona, a time i brzinu vrtnje istosmjernog motora. PWM signal realizirat ćemo pomoću H mosta prikazanog na slici 8.53. H most ima četiri MOSFET tranzistora koji rade kao sklopke. Ako se aktiviraju sklopke S1 i S4,

prema slici 8.53 struja teče s lijeva na desno i motor se okreće u jednu stranu ako radi u motorskom režimu rada [22]. Ako se aktiviraju sklopke S3 i S2, prema slici 8.53 struja teče s desna na lijevo i motor se okreće u drugu stranu ako radi u motorskom režimu rada. Dužina aktivnog stanja svih sklopki unutar jednog perioda T ovisi o vremenu visokog stanja PWM signala T_D , a to dalje utječe na srednju vrijednost napona armature U_a . U H mostu potrebno je osigurati da sklopke S1 i S2 te S3 i S4 ne budu aktivne istovremeno kako ne bismo kratko spojili izvor istosmjernog napona U_{DC} . H most u sustav unosi kašnjenje T_H . Prijenosnu funkciju H mosta (aktuatora) modelirat ćemo PT1 članom:

$$G_A(s) = \frac{K_H}{T_H s + 1}. \quad (8.97)$$

S obzirom da će regulator upravljački signal proslijediti aktuatoru, aktuator je potrebno dodati u model istosmjernog motora prikazanog slikom 8.51. Blokova shema istosmjernog motora s permanentnim magnetima i aktuatom prikazana je na slici 8.55.



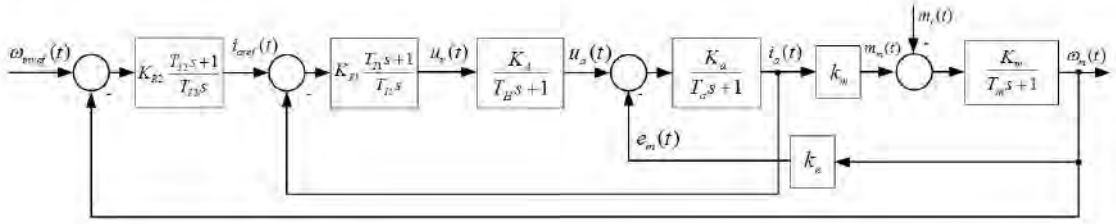
Slika 8.55: Blokova shema istosmjernog motora s permanentnim magnetima + aktuatom (H most)

Obradili smo senzor i aktuator u sustavu te možemo krenuti sa sintezom regulacijskog kruga.

8.10.4 Sinteza kaskadnog sustava upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog motora

Kaskadni sustavi upravljanja sastoje se od pomoćnih (podređenih) regulacijskih krugova i glavnog (nadređenog) regulacijskog kruga. Ova struktura upravljanja temelji se na regulaciji više veličina u sustavu. Na primjeru istosmjernog motora s permanentnim magnetima, kaskadna regulacija se svodi na sintezu:

- regulatora struje armature $i_a(t)$ u podređenom regulacijskom krugu kojemu je nadređen regulator brzine vrtnje $\omega_m(t)$
- regulatora brzine vrtnje $\omega_m(t)$ u nadređenom regulacijskom krugu.



Slika 8.56: Blokovska shema kaskadnog sustava upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog motora s permanentnim magnetima

Blokovska shema kaskadnog sustava upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog motora s permanentnim magnetima prikazana je na slici 8.56. Unutarnja (podređena) regulacijska petlja upravljana je PI regulatorom s parametrima K_{R1} i T_{I1} , a vanjska (nadređena) regulacijska petlja upravljana je PI regulatorom s parametrima K_{R2} i T_{I2} . Podređeni regulacijski krug brži je od nadređenog regulacijskog kruga te se poremećajne veličine kompenziraju već u podređenom krugu. Nadređeni regulator tvori referentnu vrijednost za podređeni regulator. Navedimo sada parametre istosmjernog motora s permanentnim magnetima: $T_a = 1.5$ ms, $K_a = 0.4545 \Omega^{-1}$, $R_a = 2.2 \Omega$, $L_a = 3.3$ mH, $k_e = 1.14 \frac{\text{Vs}}{\text{rad}}$, $k_m = 1.14 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}$, $J_m = 0.0004 \text{ kgm}^2$, $B_m = 0.002 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$, $T_m = 0.2$ s, $T_H = 0.1$ ms, $K_H = 1$ V.

Mehanička vremenska konstanta T_m veća je od armaturne vremenske konstante T_a te prema tome, protuelektromotornu silu $e_m(t)$ možemo smatrati sporopromjenjivom poremećajnom veličinom u brzom podređenom regulacijskom krugu. Ova će nam činjenica olakšati sintezu podređenog regulatora koji ćemo parametrirati metodom tehničkog optimuma. Otvoreni podređeni krug ima prijenosnu funkciju:

$$G_{oi}(s) = K_{R1} \frac{T_{I1}s + 1}{T_{I1}s} \frac{K_H}{T_Hs + 1} \frac{K_a}{T_as + 1} \quad (8.98)$$

Dominantna vremenska konstanta je T_a i nju ćemo kompenzirati s integralnom vremenskom konstantom:

$$T_{I1} = T_a = 1.5 \text{ ms}. \quad (8.99)$$

Nakon kompenzacije dominantne vremenske konstante, prijenosna funkcija otvorenog podređenog kruga je:

$$G_{oi}(s) = \frac{K_{R1} K_a K_H}{T_{I1}s (T_Hs + 1)}. \quad (8.100)$$

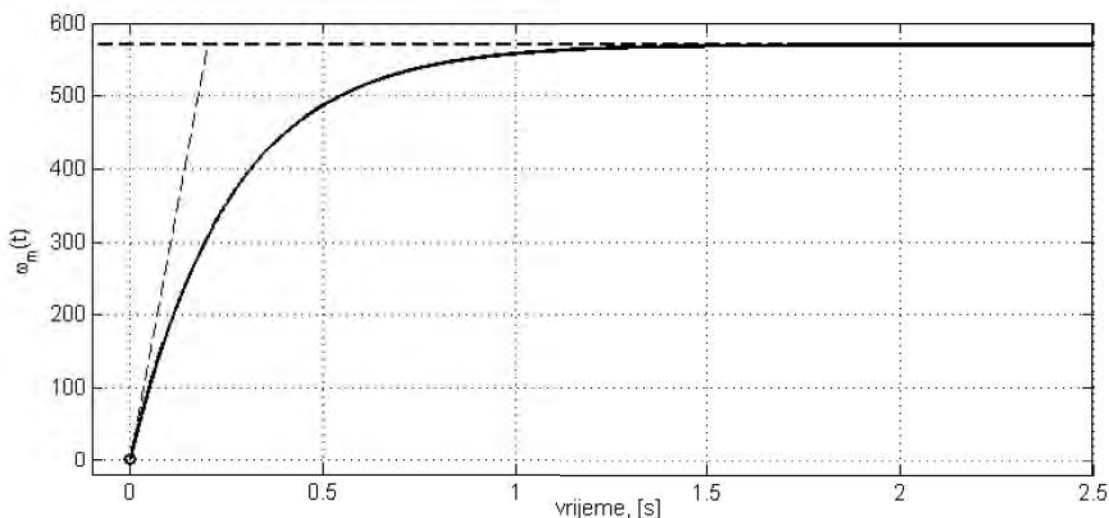
Prema relaciji (8.74) koeficijent pojačanja PI regulatora podređenog kruga je:

$$K_{R1} = \frac{1}{2} \frac{1}{K_a K_H} \frac{T_{I1}}{T_H} = 16.5 \Omega. \quad (8.101)$$

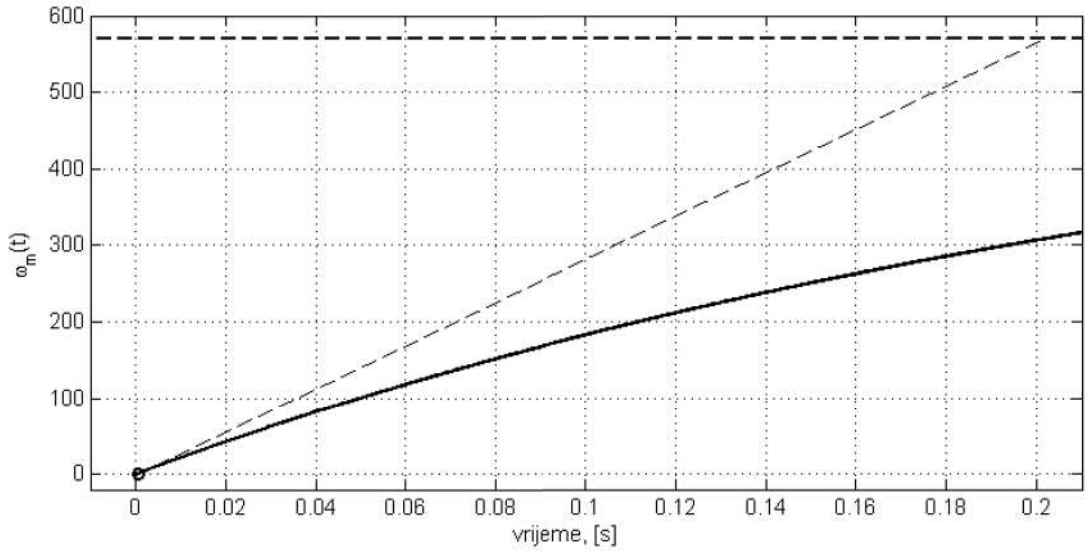
Podređeni PI regulator, odnosno regulator struje armature ima sljedeći oblik:

$$G_{R1}(s) = 16.5 \frac{0.0015s + 1}{0.0015s}. \quad (8.102)$$

Nadređeni PI regulator, odnosno regulator brzine vrtnje, parametrirat ćemo Ziegler-Nicholsovom metodom prijelazne funkcije. Na podređeni krug potrebno je dovesti jediničnu skokovitu pobudu te ćemo temeljem prijelazne funkcije podređenog kruga odrediti karakteristične veličine prijelazne funkcije bitne za parametriranje PI regulatora. Prijelazna funkcija brzine vrtnje s uključenim PI regulatorom struje armature istosmjernog motora prikazana je na slici 8.57. Zbog brzog podređenog regulacijskog kruga, teško je očitati vrijeme zadržke t_z .



Slika 8.57: Prijelazna funkcija brzine vrtnje s uključenim PI regulatorom struje armature istosmjernog motora



Slika 8.58: Prijelazna funkcija brzine vrtnje s uključenim PI regulatorom struje armature istosmjernog motora (uvećano)

Uvećana prijelazna funkcija brzine vrtnje s uključenim PI regulatorom struje armature istosmjernog motora prikazana je na slici 8.58. Sa slike 8.58 očitat ćemo sljedeće veličine bitne za parametriranje PI regulatora:

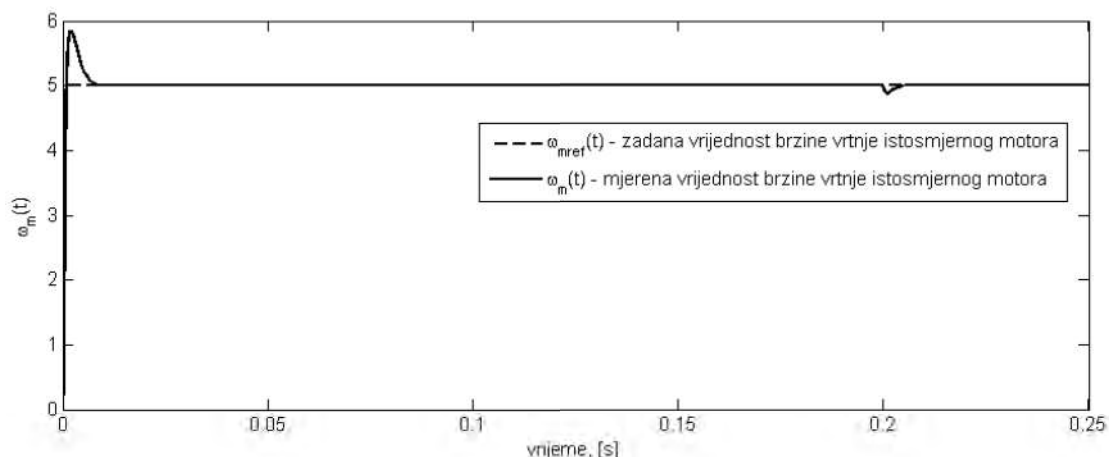
$$\begin{aligned} t_z &= 0.5586 \text{ ms} \\ t_p &= 0.2015 \text{ s} \\ K_s &= 570 \frac{\text{rad}}{\text{As}}. \end{aligned} \quad (8.103)$$

Temeljem tablice 8.2 parametri nadređenog PI regulatora, odnosno PI regulatora brzine vrtnje su:

$$\begin{aligned} K_{R2} &= \frac{0.9}{K_s} \frac{t_p}{t_z} = 0.5695 \frac{\text{As}}{\text{rad}} \\ T_{I2} &= 3.33 t_z = 1.86 \text{ ms}. \end{aligned} \quad (8.104)$$

Nadređeni PI regulator, odnosno regulator brzine vrtnje istosmjernog motora ima sljedeći oblik:

$$G_{R2}(s) = 0.5695 \frac{0.00186s + 1}{0.00186s}. \quad (8.105)$$



Slika 8.59: Odziv brzine vrtnje istosmjernog motora upravljanog nadređenim PI regulatorom parametriranim prema Ziegler-Nicholsovoj metodi prijelazne funkcije i podređenim PI regulatorom parametriranim metodom tehničkog optimuma pri djelovanju poremećaja $m_t(t) = 0.1$ Nm za $t \geq 0.2$ s ($K_{R2} = 0.5695$, $T_{I2} = 1.86$ ms)

Odziv brzine vrtnje istosmjernog motora upravljanog nadređenim PI regulatorom parametriranim prema Ziegler-Nicholsovoj metodi prijelazne funkcije i podređenim PI regulatorom parametriranim metodom tehničkog optimuma pri djelovanju poremećaja $m_t(t) = 0.1$ Nm za $t \geq 0.2$ s prikazan je na slici 8.59. Kao što se može primijetiti, sustav ima dobro vladanje i s obzirom na vodeću veličinu ω_{mref} i s obzirom na poremećajnu veličinu $m_t(t)$ što je upravo odlika kaskadnih sustava upravljanja. Poremećajna veličina kompenzira se u podređenom krugu, a nadređeni regulator omogućuje dobro slijedeće referentne veličine iako je parametriran prema Ziegler-Nicholsovoj metodi prijelazne funkcije, što znači da se vladanje s obzirom na referentnu veličinu može poboljšati korekcijom parametara PI regulatora nadređenog regulacijskog kruga. Nadvišenje u sustavu, s obzirom na vodeću veličinu je 16.95% čime možemo biti zadovoljni kada je u pitanju upravljanje brzinom vrtnje istosmjernog motora.

Ovim primjerom završili smo poglavlje o sintezi kontinuiranih linearnih sustava automatskog upravljanja.

Poglavlje 9

PRILOZI

9.1 Laplaceova transformacija

Definicija Laplaceove transformacije je [5]:

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (9.1)$$

gdje je s kompleksna varijabla. Navedimo svojstva Laplaceove transformacije:

Linearnost Laplaceove transformacije Ako je:

$$f(t) \circ \bullet F(s), \quad g(t) \circ \bullet G(s), \quad (9.2)$$

tada vrijedi:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \circ \bullet \alpha F(s) + \beta G(s). \quad (9.3)$$

Množenje varijable s konstantom

$$\begin{aligned} f(at) &\circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \\ F(bs) &\bullet \circ \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Prigušenje originala $f(t)$ Prigušenje originala odgovara pomakom slike ulijevo:

$$e^{-at} f(t) \circ \bullet F(s+a). \quad (9.5)$$

Teorem o pomaku originala Neka je $f(t) \circ \bullet F(s)$ i $a > 0$. Pomak originalu udesno odgovara prigušenje u donjem području:

$$f(t-a)\mu(t-a) \circ \bullet e^{-as} F(s). \quad (9.6)$$

Deriviranje originala $f(t)$ Za deriviranje originala $f(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} f'(t) &\circ\!\!\!\bullet sF(s) - f(0) \\ f''(t) &\circ\!\!\!\bullet s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(t) &\circ\!\!\!\bullet s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Deriviranje slike $f(t)$ Deriviranje u frekvencijskoj domeni (s domeni) odgovara množenju s $-t$ u vremenskoj domeni:

$$\begin{aligned} (-t)f(t) &\circ\!\!\!\bullet F'(s) \\ (-t)^n f(t) &\circ\!\!\!\bullet F^{(n)}(s). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Integriranje originala

$$\int_0^t f(t)dt \circ\!\!\!\bullet \frac{F(s)}{s}. \quad (9.9)$$

Integriranje slike

$$\frac{f(t)}{t} \circ\!\!\!\bullet \int_s^\infty F(s)ds. \quad (9.10)$$

Slika periodične funkcije Slika periodične funkcije $f(t)$ s periodom T računa se:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt. \quad (9.11)$$

Teorem o konačnoj vrijednosti Konačna vrijednost ili stacionarno stanje (ustaljena vrijednost) odziva može se dobiti sljedećim izrazom:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (9.12)$$

Teorem o početnoj vrijednosti

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (9.13)$$

Teorem o konvoluciji Konvolucija dvaju originala odgovara umnošku slika:

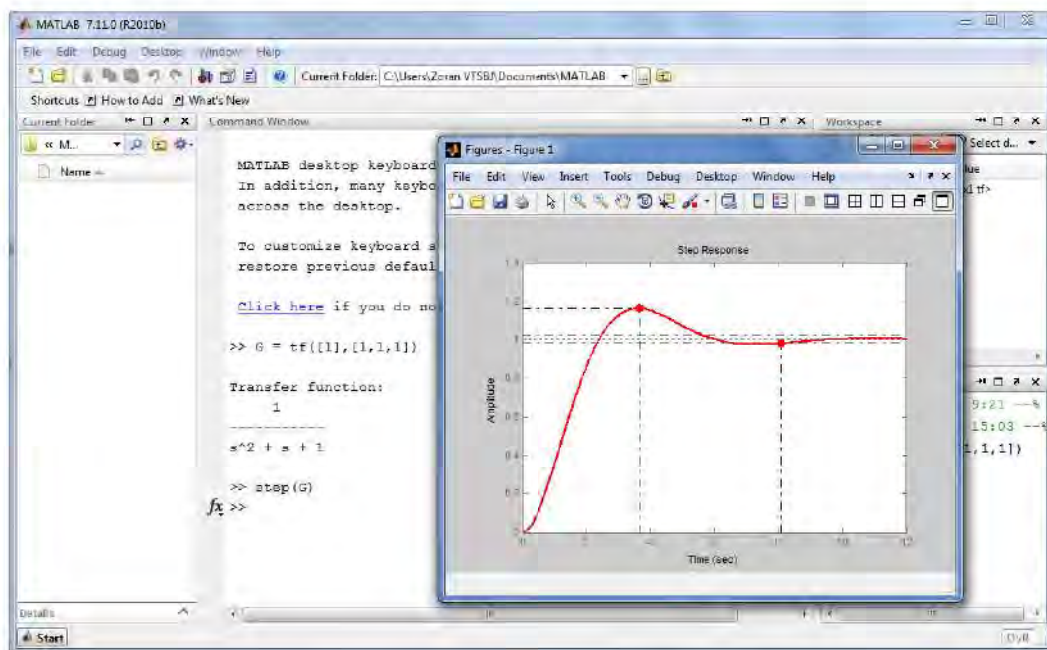
$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau \circ\!\!\!\bullet Y(s) = G(s)U(s). \quad (9.14)$$

9.1.1 Tablica Laplaceove transformacije

Opis funkcije	Original funkcije $f(t)$	Laplaceov transformat $F(s)$
Dirac delta	$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{za } t = 0 \\ 0 & \text{za } t \neq 0 \end{cases}$	1
Idealno kašnjenje	$\delta(t - kT_D) = \begin{cases} \infty & \text{za } t = kT_D \\ 0 & \text{za } t \neq kT_D \end{cases}$	$e^{-kt_D s}$
Jedinična stepenica	$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } t \geq 0 \\ 0 & \text{za } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
Rampa	t	$\frac{1}{s^2}$
Parabola	t^2	$\frac{2}{s^3}$
Eksponecijalna funkcija (1)	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Eksponecijalna funkcija (2)	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
Rampa s eksponencijalnim prigušenjem	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Parabola s eksponencijalnim prigušenjem	$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$
Razlika eksponencijalnih funkcija	$be^{-bt} - ae^{-at}$	$\frac{(b-a)s}{(s+b)(s+a)}$
Sinus funkcija	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Cosinus funkcija	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Prigušena sinusoida	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Prigušena kosinusoida	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
1. derivacija	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
2. derivacija	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
n-ta derivacija	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
Integral	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s} F(s)$

9.2 Primjena Matlab&SIMULINK-a u analizi sustava automatskog upravljanja

Matlab je matrični kalkulator koji se u počecima svog postojanja koristio u svrhu obrade laboratorijskih podataka. Prednost mu je što je otvoren prema korisnicima te je tako stvoreno mnogo alata za većinu djelatnosti iz tehničkih znanosti. Matlab korisničko sučelje prikazano je na slici 9.1.



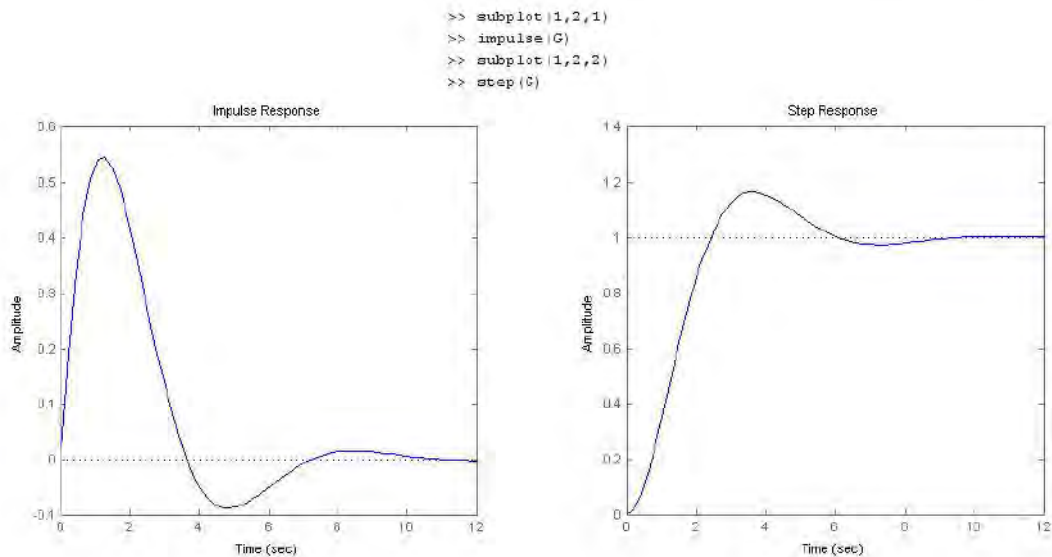
Slika 9.1: Matlab korisničko sučelje

U svrhu analize i sinteze sustava automatskog upravljanja razvijen je *Control System Toolbox*. Ovdje ćemo obraditi osnovne funkcije koje se koriste u svrhu analize i sinteze kontinuiranih sustava automatskog upravljanja. Počnimo s kreiranjem prijenosne funkcije kontinuiranog sustava.

Funkcija `tf` (engl. *Transfer Function*) služi za kreiranje prijenosne funkcije.

<code>>> G=tf([1],[1 1 1])</code>	<code>>> G = tf([1,2],[1 2 1])</code>	<code>>> G = tf([1,2,4],[3 1 0])</code>
Transfer function:	Transfer function:	Transfer function:
1	s + 2	s^2 + 2 s + 4
-----	-----	-----
s^2 + s + 1	s^2 + 2 s + 1	3 s^2 + s

Slika 9.2: Stvaranje prijenosne funkcije kontinuiranog sustava



Slika 9.3: Težinska i prijelazna funkcija sustava

Na slici 9.2 prikazan je način na koji se stvaraju prijenosne funkcije kontinuiranih sustava. Težinsku funkciju $g(t)$ sustava $G(s)$ možemo nacrtati funkcijom `impulse`, prijelaznu funkciju $h(t)$ funkcijom `step` (slika 9.3). Ako želimo saznati pokazatelje kvalitete (nadvišenje, vrijeme porasta, vrijeme prvog maksimuma, ...) potrebno je koristiti funkciju `stepinfo` (slika 9.4).

```

>> stepinfo(G)

ans =

    RiseTime: 1.6442
  SettlingTime: 8.0755
  SettlingMin: 0.9729
  SettlingMax: 1.1630
    Overshoot: 16.2983
    Undershoot: 0
         Peak: 1.1630
    PeakTime: 3.6029

```

Slika 9.4: Pokazatelji kvalitete prijelazne funkcije sustava

Položaj polova i nula (njihov grafički prikaz) možemo dobiti koristeći funkcije `zero`, `pole` i `pzmap` (slika 9.5). Na temelju položaja polova možemo zaključiti o stabilnosti sustava.

Do sada smo koristili funkcije koje su omogućavale pregled ponašanja sustava u vremenskoj domeni. Nadalje, prikazimo i frekvencijski odziv sustava. Nyquistov dijagram sustava dobit ćemo koristeći naredbu `nyquist` (slika 9.6) Bodeov dijagram sustava dobit ćemo koristeći naredbu `bode` (slika 9.7).

```
>> zero(G)

ans =

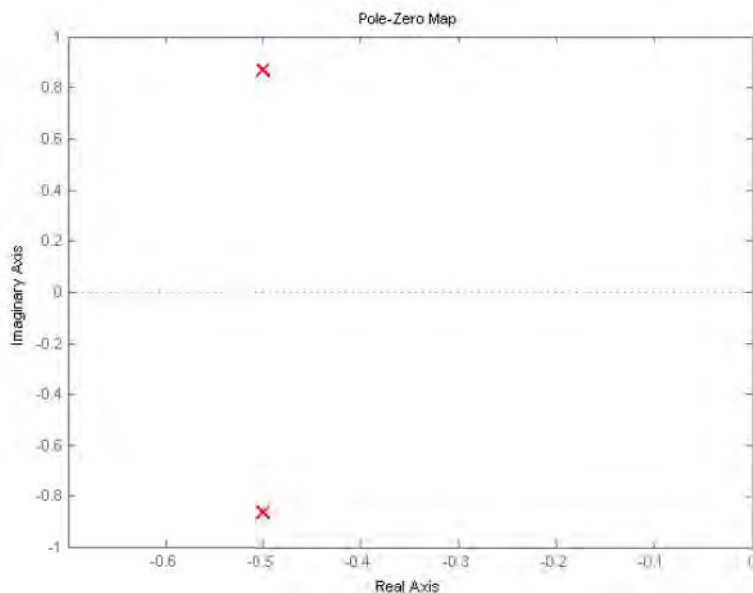
    Empty matrix: 0-by-1

>> pole(G)

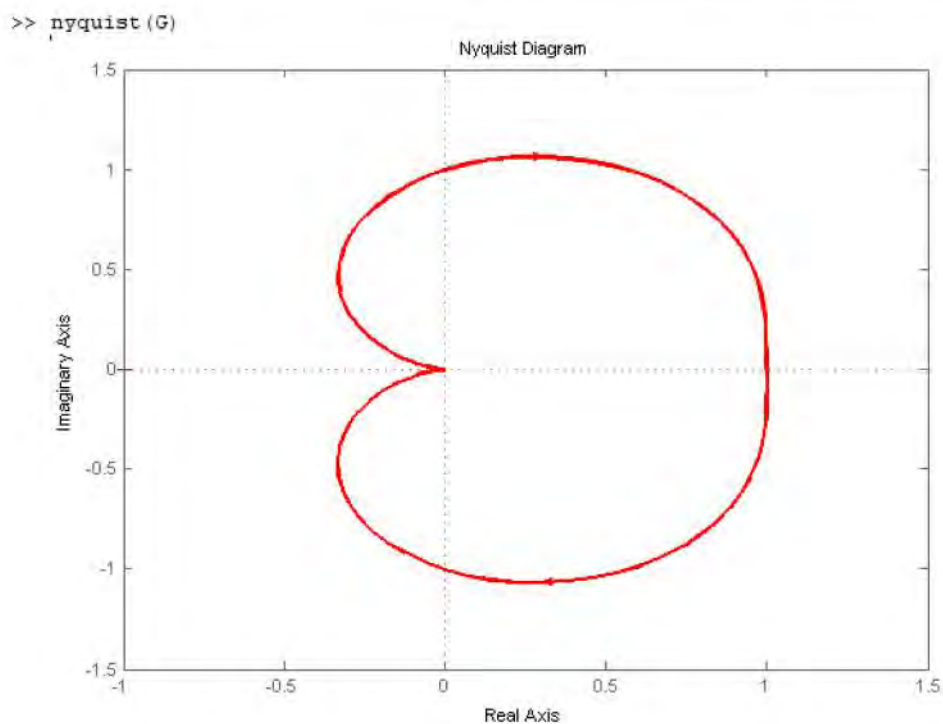
ans =

    -0.5000 + 0.8660i
    -0.5000 - 0.8660i

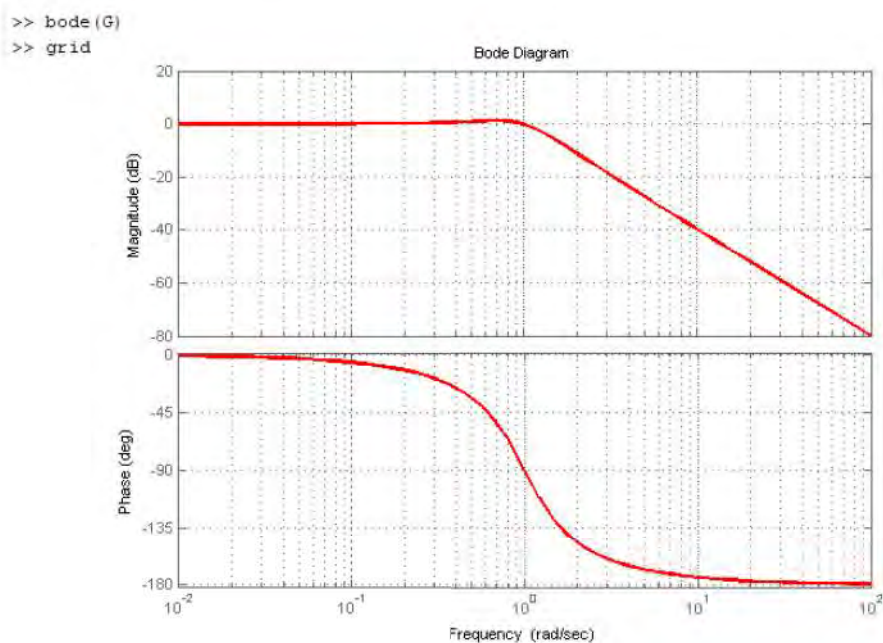
>> pzmap(G)
```



Slika 9.5: Nule i polovi sustava

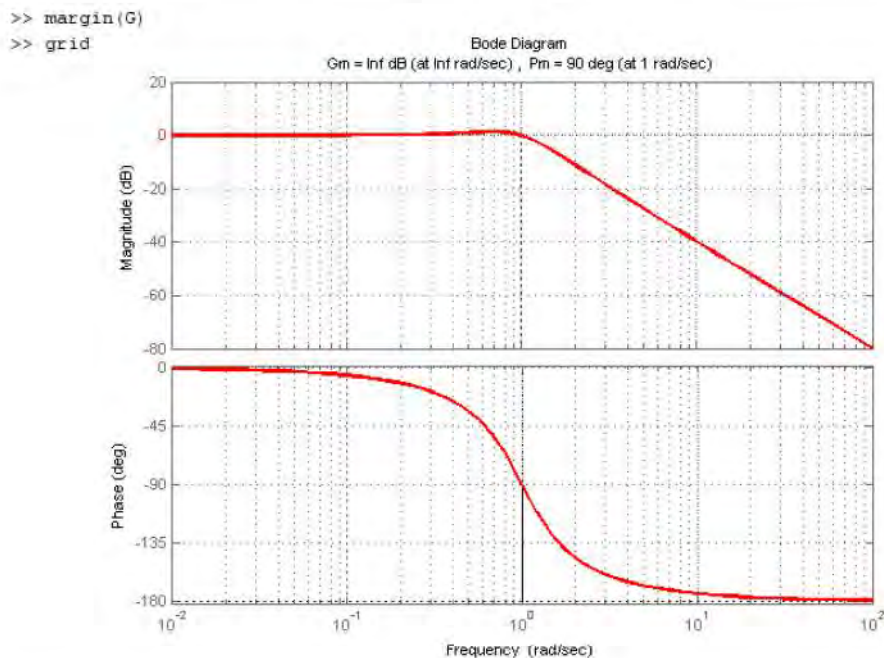


Slika 9.6: Nyquistov dijagram sustava



Slika 9.7: Bodeov dijagram sustava

Ako želimo da nam na Bodeovom dijagramu budu označeni i amplitudno i fazno osiguranje, koristi ćemo funkciju `margin`.



Slika 9.8: Bodeov dijagram sustava (Amplitudno i fazno osiguranje)

Stabilnost sustava može se odrediti na temelju Bodeovog i Nyquistovog dijagrama, kao i pomoću razmještaja polova u s ravnini. Na stranici Matlaba možete skinuti i funkcije za algebarske kriterije stabilnosti, odnosno Routhov kriterij stabilnosti. Funkcija se naziva `routh.m`, a koristi se za sustave višeg reda. Kao argumente, funkcija prima koeficijente karakteristične jednadžbe.

```
>> routh([1 2 2 1 1],eps)

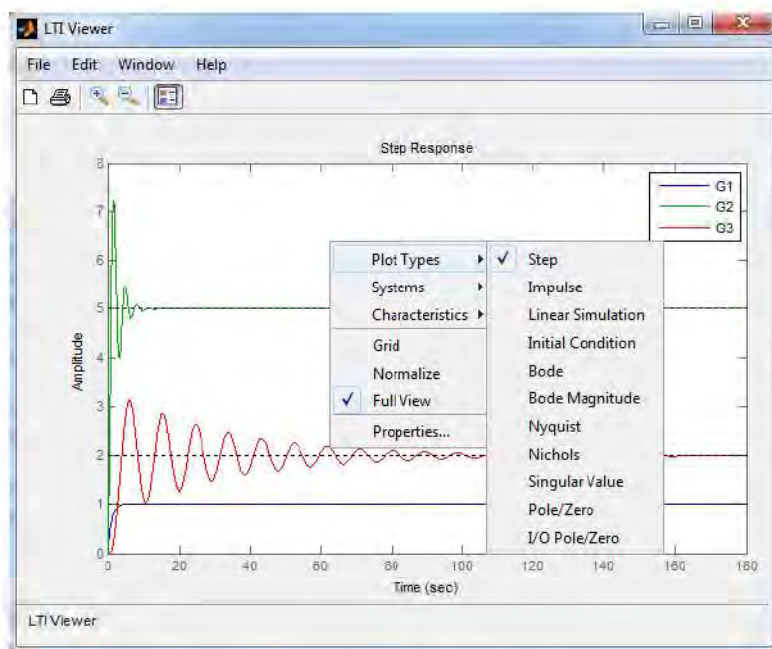
ans =

    1, 2, 1
    2, 1, 0
    3/2, 1, 0
    -1/3, 0, 0
    1, 0, 0
```

Slika 9.9: Routhov kriterij stabilnosti

Na temelju rezultata sa slike 9.9 sustav je nestabilan jer u prvom stupcu Routhove

tablice imamo promjenu predznaka. Statičko pojačanje sustava možemo odrediti naredbom `dcgain(G)`. U ovoj knjizi prvenstveno smo se bavili LTI sustavima (linearnim i vremenski nepromjenjivim sustavima). Naredbom `ltiview` pokreće se grafičko sučelje prikazano na slici 9.10.



Slika 9.10: Analiza LTI sustava

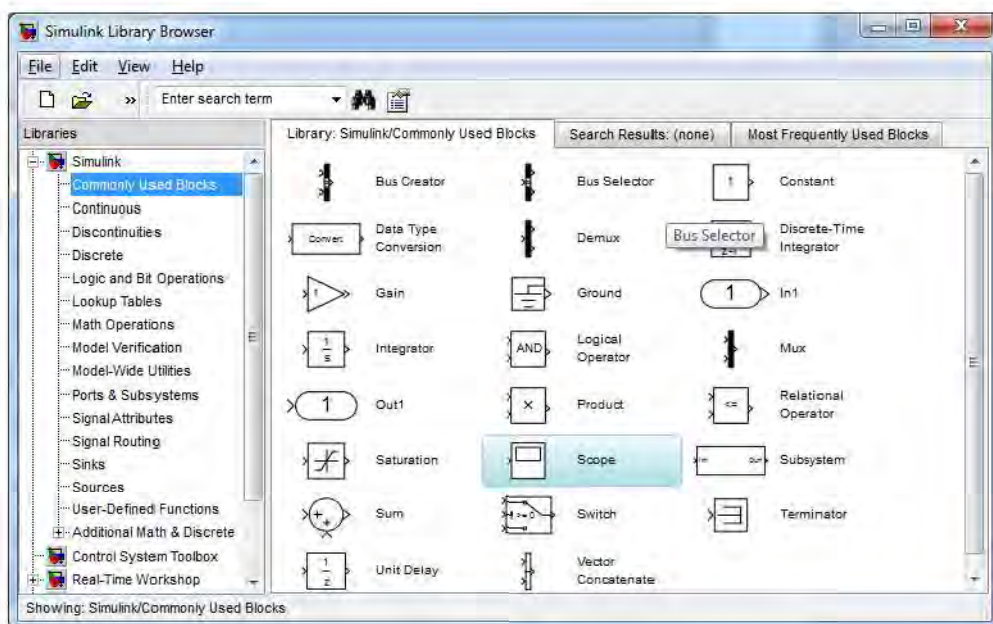
U grafičkom sučelju sa slike 9.10 možemo analizirati sustav i u vremenskoj i u frekvencijskoj domeni.

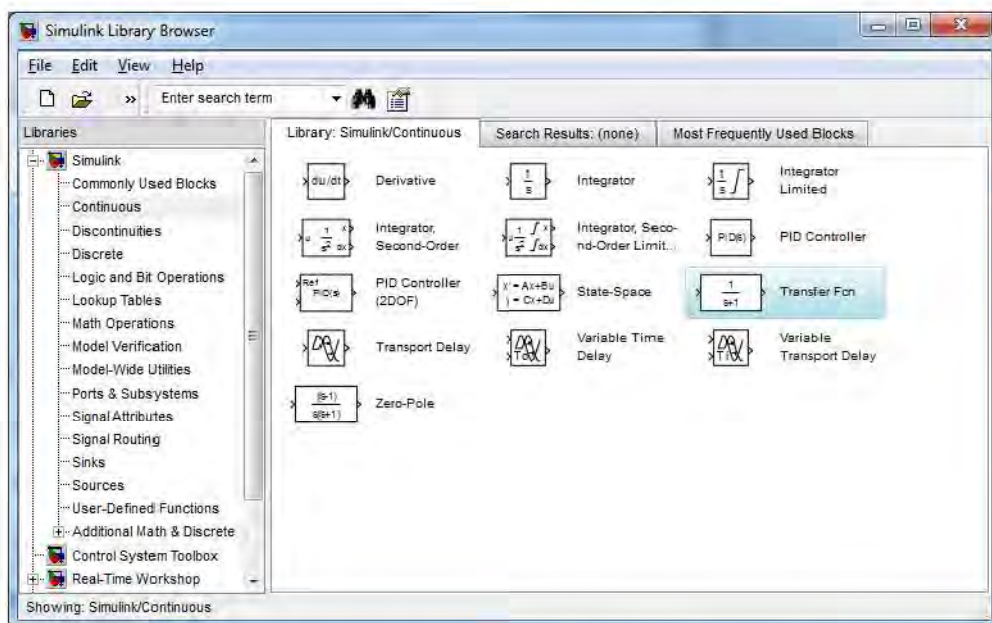
9.2.1 Realizacija matematičkog modela sustava u *SIMULINK* - u

Simulacijski dio paketa Matlab&*SIMULINK* koristi se za simulaciju sustava pomoću blokovskih dijagrama. *SIMULINK* je grafički programski paket koji za izvođenje simulacija dinamičkih sustava koristi numeričke metode. Stvaranje matematičkog modela u *SIMULINK* - u svodi se na korištenje gotovih blokova koji se nalaze u biblioteci gotovih blokova. Kada se izradi matematički model dinamičkog sustava, korisnik unutar *SIMULINK* paketa može snimati svaki signal u sustavu što mu omogućuje detaljni pregled ponašanja dinamičkog sustava. *SIMULINK* svojim korisnicima omogućuje da na vrlo jednostavan način opišu i simuliraju sve sustave, od jednostavnih do najsloženijih. Pokretanje *SIMULINK* - a izvodi se izravno iz Matlabovog prozora prikazanog na slici 9.11. Nakon pokretanja *SIMULINK* - a, otvara se skup biblioteka koje možemo koristiti u modeliranju (slika 9.11).

Slika 9.11: Pokretanje *SIMULINK* - a

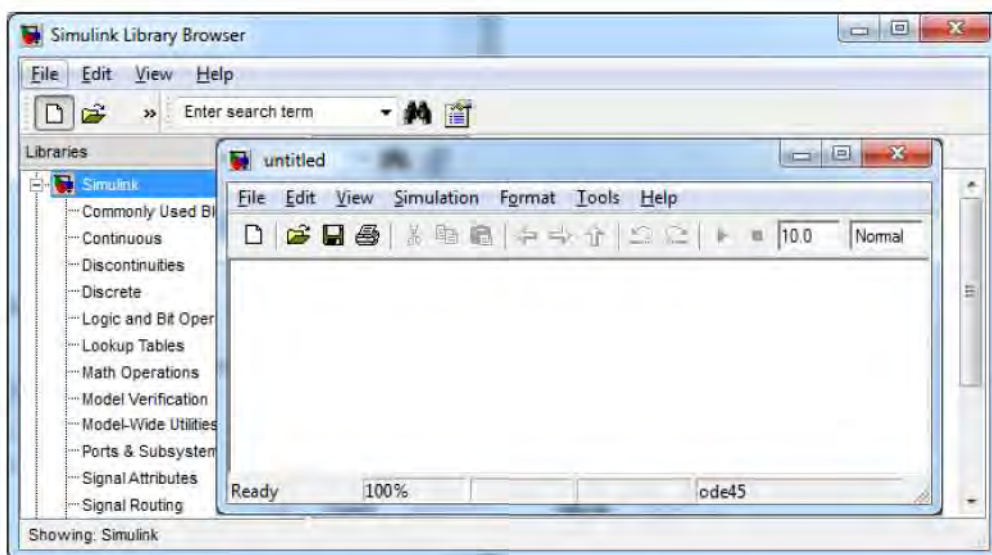
Biblioteke najčešće korištenih blokova u *SIMULINK* - u i kontinuiranih blokova u *SIMULINK* - u prikazane su na slikama 9.12 i 9.13. To su biblioteke koje moramo znati koristiti ako želimo opisati kontinuirane dinamičke sustave.

Slika 9.12: Biblioteka najčešće korištenih blokova u *SIMULINK* - u

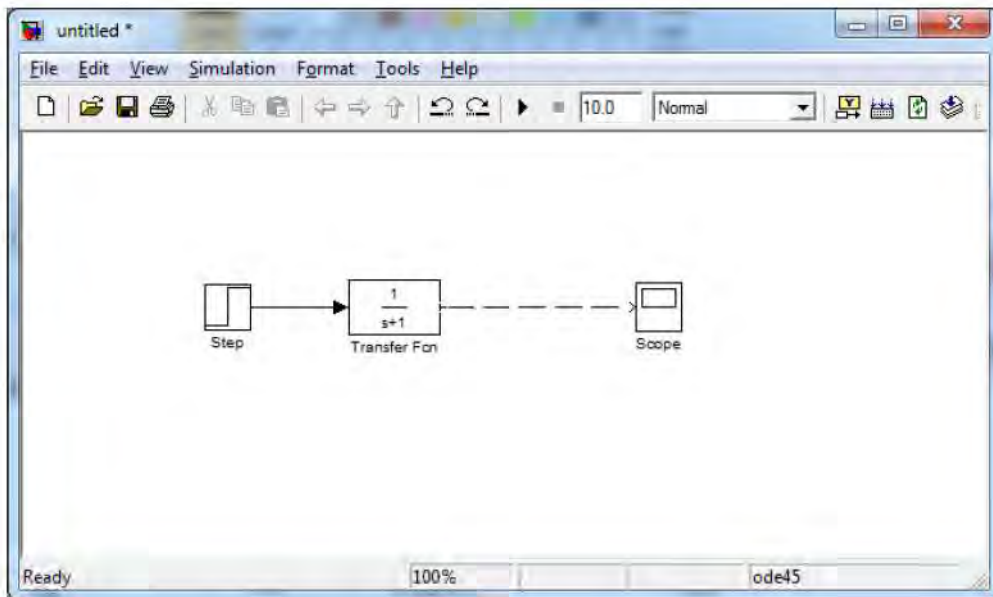


Slika 9.13: Biblioteka kontinuiranih blokova u *SIMULINK* - u

Nakon što je pokrenut *SIMULINK*, stvara se novi model u *SIMULINK* - u što je prikazano na slici 9.14. Matematički model sustava u *SIMULINK* - u stvara se međusobnim spajanjem blokova iz biblioteka sa slike 3.69 i 3.70 u novostvorenom modelu sa slike 9.14.



Slika 9.14: Novi model u *SIMULINK* - u



Slika 9.15: Spajanje blokova u SIMULINK - u

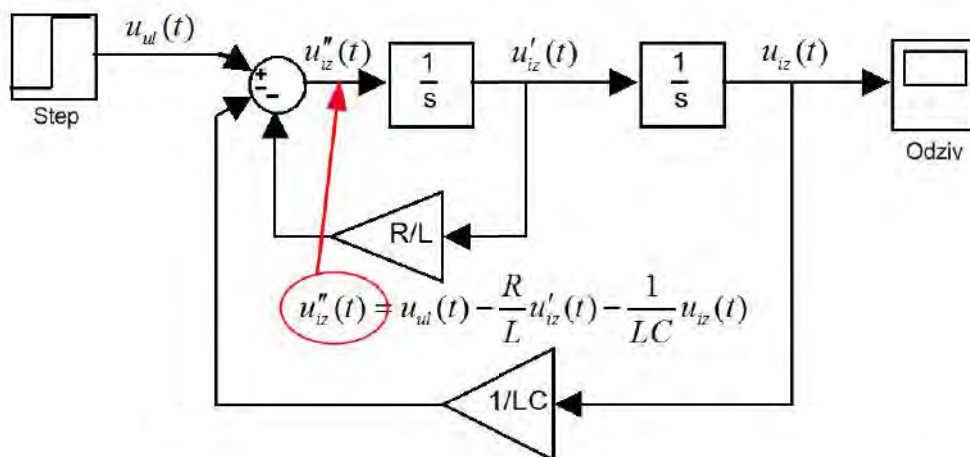
Spajanje blokova prokazano je na slici 9.15.

Korištenjem Matlab *SIMULINK* - a moguće je realizirati diferencijalne jednadžbe pomoću blokova. Ako koristimo pravilo da je svaka varijabla stanja integral njezine derivacije,¹ tada se svaka diferencijalna jednadžba može opisati kaskadom integratora. Pokušajmo ovo pravilo primijeniti na sustavu RLC kruga. Diferencijalna jednadžba (3.85) može se zapisati u obliku:

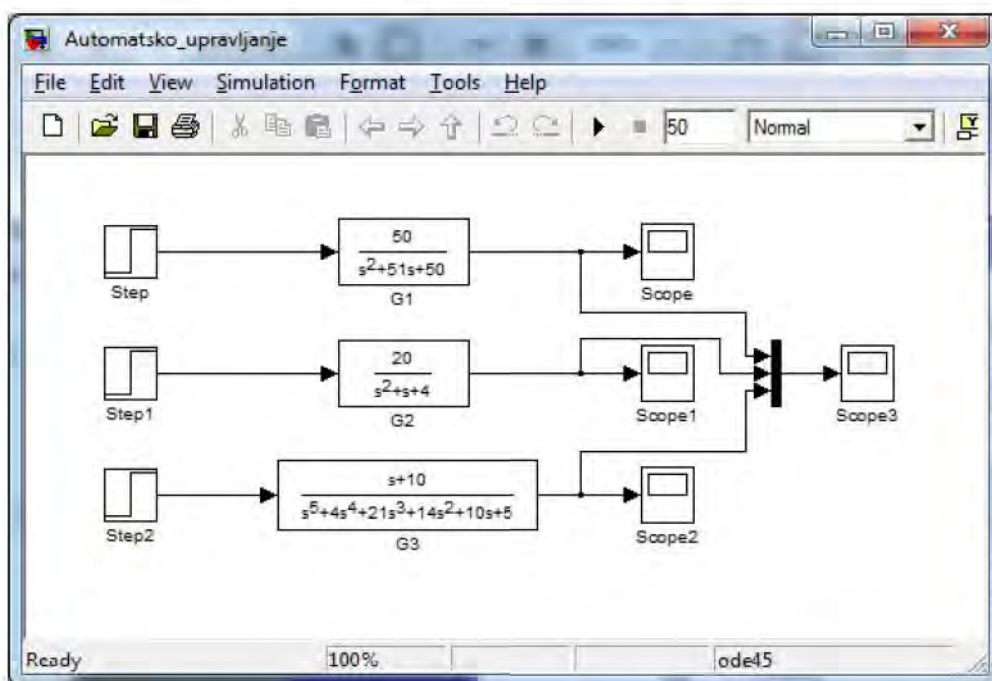
$$\begin{aligned} LCu''_{iz}(t) + RCu'_{iz}(t) + u_{iz}(t) &= u_{ul}(t) \\ u''_{iz}(t) &= u_{ul}(t) - \frac{R}{L}u'_{iz}(t) - \frac{1}{LC}u_{iz}(t) \end{aligned} \quad (9.15)$$

Relaciju (9.15) direktno možemo zapisati pomoću blokova koristeći blokove integratora, sumatora i konstanti (slika 9.16).

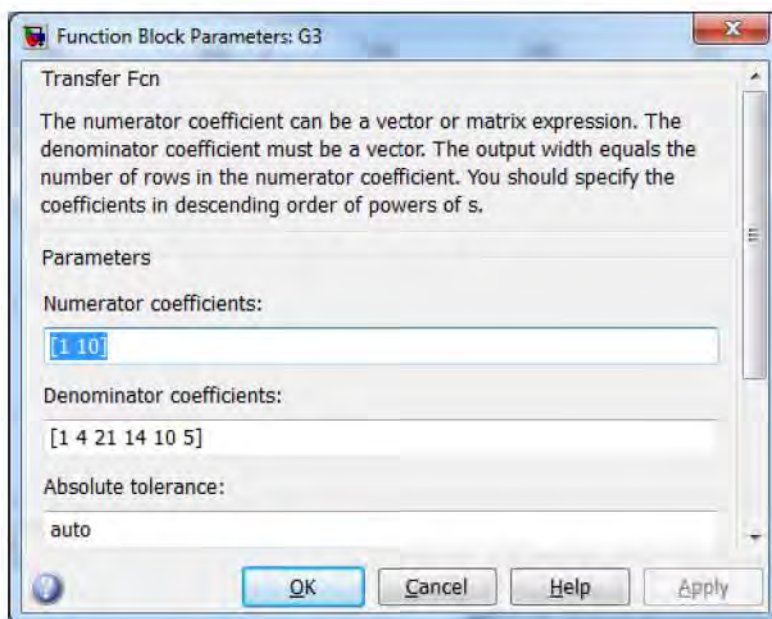
¹Što je matematički ispravno jer vrijedi da je $x_n(t) = \int_0^t x'_n(t)dt$

Slika 9.16: Realizacija diferencijalne jednadžbe u Matlab *SIMULINK* - u

Kada se u opisu sustava koristi prijenosna funkcija u Laplaceovoj domeni, tada je u Matlab *SIMULINK* - u potrebno koristiti blok *Transfer Fcn*. Primjer realizacije triju prijenosnih funkcija *SIMULINK* - a prikazan je na slici 9.17.

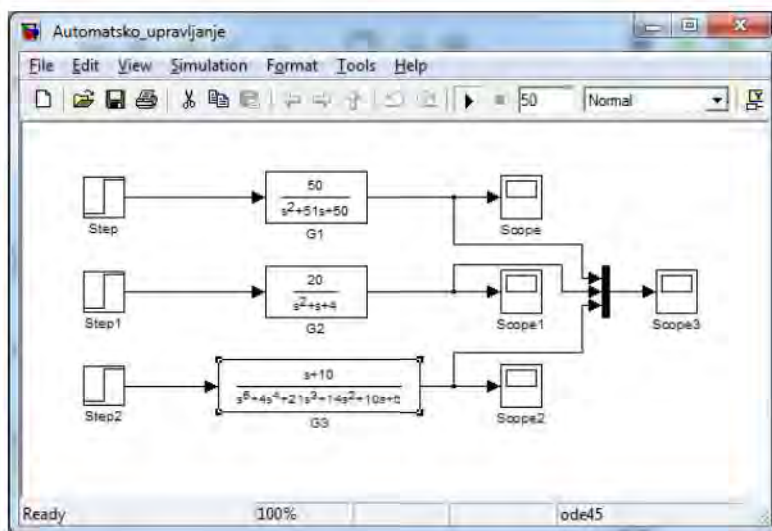
Slika 9.17: Realizacija prijenosne funkcije u Matlab *SIMULINK* - u

Parametre prijenosnih funkcija možemo mijenjati dvostrukim klikom na prijenosnu funkciju u *SIMULINK* - u te promjenom parametara brojnika i nazivnika.

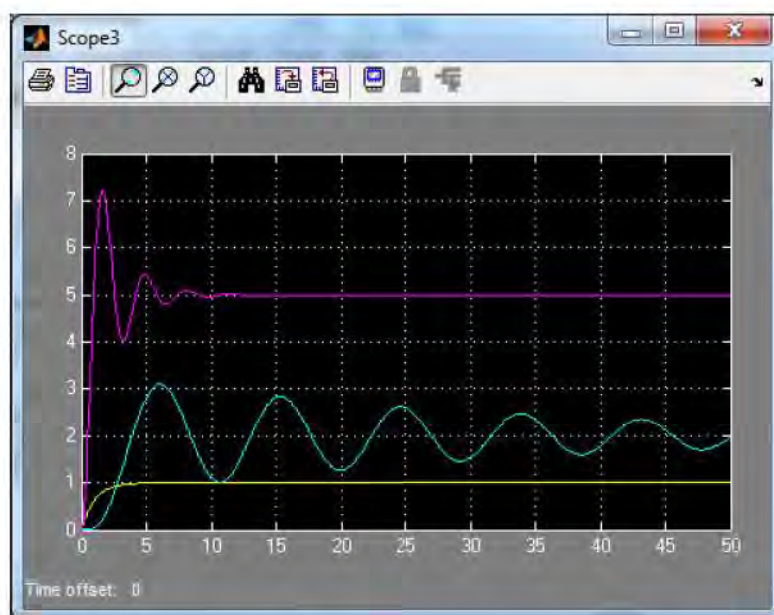


Slika 9.18: Blok za unos parametara prijenosne funkcije

Kada realiziramo model sustava upravljanja u *SIMULINK* - u, potrebno je namjestiti vrijeme simulacije i pokrenuti simulaciju (slika 9.19).

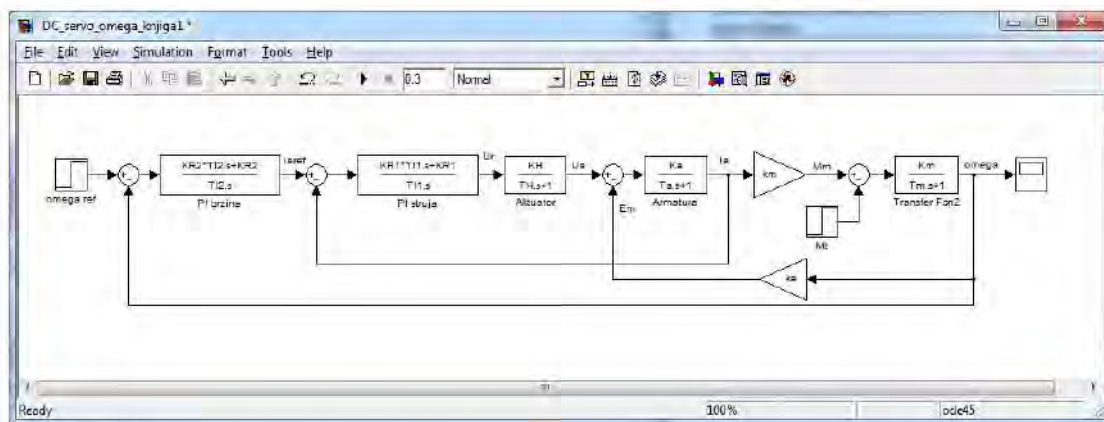


Slika 9.19: Namještanje vremena simulacije i pokretanje simulacije



Slika 9.20: Rezultati simulacije

Realizacija složenijeg sustava upravljanja u *SIMULINK* - u, kao što je primjer kaskadnog sustava upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog motora s permanentnim magnetima, prikazan je na slici 9.21.

Slika 9.21: Kaskadni sustav upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog motora s permanentnim magnetima u *SIMULINK* - u

Više o korištenju Matlaba i *SIMULINK* - a možete pronaći u literaturi [24].

Bibliografija

- [1] Z. Vukić and L. Kuljača, *Automatsko upravljanje - analiza linearnih sustava*. KI-GEN, Zagreb, 2005.
- [2] T. Šurina, *Automatska regulacija*. Školska knjiga, Zagreb, 1991.
- [3] Z. Vrhovski and D. Purković, *SIGNALI I SUSTAVI - Zbirka riješenih zadataka*. Visoka tehnička škola u Bjelovaru, Bjelovar, 2012.
- [4] H. Babić, *SIGNALI I SUSTAVI*. FER - Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija, Zagreb, 1996.
- [5] N. Elezović, *MATEMATIKA 3 - Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija*. ELEMENT, Zagreb, 2006.
- [6] D. Stipaničev and J. Marasović, *Digitalno vođenje*. Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split, 2008.
- [7] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design, 3rd Edition*. Oxford University Press, 1999.
- [8] P. de Larminat, *Analysis and control of linear systems*. Wiley-ISTE, 2007.
- [9] J. J. DiStefano, A. R. Stubberud, and I. J. Williams, *Theory and Problems of Feedback and Control System*. Schaum's Outline, 1995.
- [10] N. Perić, *Automatsko upravljanje*. FER - Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo, Zagreb, 2009.
- [11] N. Elezović, *Funkcija kompleksne varijable*. ELEMENT, Zagreb, 2008.
- [12] K. Najim, *Control of Continuous Linear Systems*. ISTE Ltd, London, 2006.
- [13] T. Petković, *Fourierova transformacija i spektri - predavanja*. FER - Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija, Zagreb, 2005.
- [14] E. Cheever, *Linear Physical Systems Analysis - Bode Plots*. <http://www.swarthmore.edu/NatSci/echeeve1/Ref/LPSA/Bode/Bode.html>: Department of Engineering, Swarthmore College.

- [15] N. Elezović, *Linearna algebra*. ELEMENT, Zagreb, 2006.
- [16] E. J. Routh, *Treatise on the Stability of a Given State of Motion*. MacMillan, London, 1877.
- [17] K. Warwick, *An Introduction to Control Systems*. World Scientific, Singapore, 1996.
- [18] C. T. Chen, *Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods*. Saunders College Publishing, 2000.
- [19] R. H. Bishop, *THE MECHATRONICS HANDBOOK*. ISA - The International Society of Automation, 2002.
- [20] P. Crnošija and T. Bjažić, *OSNOVE AUTOMATIKE I. dio: Analiza i sinteza kontinuiranih sustava - teorija i praksa*. TVZ - Zagreb, 2011.
- [21] F. Zouari, K. B. Saad, and M. Benrejeb, *Adaptive Internal Model Control of a DC Motor Drive System Using Dynamic Neural Network*. Journal of Software Engineering and Applications, 2011.
- [22] R. Wolf, *Osnove električnih strojeva*. Školska knjiga, Zagreb, 1955.
- [23] F. L. Luo and H. Ye, *ADVANCED DC/DC CONVERTERS*. CRC PRESS, 2003.
- [24] Željko Ban and J. M. A. Petrović, *Primjena programskog sustava MATLAB za rješavanje tehničkih problema*. GRAPHIS, 2010.

Kazalo

- Aditivnost, 8
- Aktuator, 162, 174
 - električni, 174
 - elektromagnetski, 174
 - elektromehanički, 174
 - hidraulički, 174
 - mehanički, 174
 - pneumatski, 174
- Algebarski kriteriji stabilnosti, 124
- Algebra blokova
 - paralelno povezivanje blokova, 51
 - povratna veza, 52
 - provlačenje sumacijske točke kroz blok, 54
 - provlačenje točke odvajanje kroz blok, 55
- Amplitudno frekvencijska karakteristika, 86
- Amplitudno osiguranje, 143, 213
- Asimptotska stabilnost, 121
- Astatički sustav, 163
- Astatizam
 - drugog reda, 163
 - prvog reda, 163
- Blok dijagrami
 - blok, 49
 - signalne linije, 49
 - sumacijske točke, 49
 - točke odvajanja, 49
- Bodeov dijagram, 85, 91, 167
 - Amplitudno osiguranje, 146
 - Fazno osiguranje, 146
- Bodeov dijagrami
 - član s transportnim kašnjenjem, 119
 - I član, 117
 - P0 član, 100
 - PT1 član, 102
 - PT2 član, 105
 - PT2S član, 109
 - D član, 115
 - DT1 član, 116
- Brzina odziva sustava, 154
- Derivacijski član, 75
- Deterministički sustavi, 13
- Diferencijalne jednadžbe
 - Obične, 21
 - Parcijalne, 21
- Dinamički članovi
 - Član s transportnim kašnjenjem, 61, 80
 - Proporcionalni član drugog reda, 61
 - Proporcionalni član nultog reda, 61
 - Proporcionalni član prvog reda, 61
 - Derivacijski član, 61
 - Integralni član, 61
 - Proporcionalni član drugog reda s prigušenim oscilatornim ponašanjem, 61
- Dinamički sustav, 5
- Dirac delta impuls, 25
- Diskretni sustavi, 13
- Dominantna vremenska konstanta, 190
- Duty Cycle, 201
- Ekspencijalna funkcija, 32
- Eulerova formula, 32
- Faktor prigušenja, 70, 190
- Faktor prigušenje, 153
- Fazno frekvencijska karakteristika, 86
- Fazno osiguranje, 143, 213
- Fourierova transformacija, 86
- Frekvencija prigušenih oscilacija, 70

- Frekvencijski kriteriji stabilnosti, 124
 Frekvencijski pojas
 širina, 156
 H most, 200
 Heavisideov razvoj, 36, 83, 121
 Homogeno rješenje, 22
 Homogenost, 8
 Hurwitzov kriterij stabilnosti, 125
 Impulsni odziv sustava, 25
 Inkrementalni enkoder, 198
 Integralni član, 78
 Integriranje originala, 34, 208
 Integriranje slike, 34, 208
 Inverzna Laplaceova transformacija, 35
 Istosmjerni motor, 66
 Izvršni član, 174
 Jedinična rampa, 25
 Jedinična stepenica, 25
 Karakteristična jednadžba sustava, 125
 Karakteristične vrijednosti
 kompleksne, 23
 realne, 23
 Kauzalni sustavi, 17
 Koeficijent pojačanja sustava, 70
 Kontinuirani sustavi, 12
 Konvolucijski integral, 25
 Kriterij optimalnosti, 157
 IAE kriterij, 159
 IE kriterij, 157
 ISE kriterij, 160
 ITAE kriterij, 159
 Kritična točka, 143
 Laplaceova transformacija, 32, 38, 207
 Linear Time-Invariant Systems, 18
 Linearna diferencijalna jednadžba, 22
 homogene, 22
 nehomogene, 23
 Linearni sustavi, 7
 Linearnost Laplaceove transformacije, 33
 LTI kontinuirani sustavi, 18
 LTI sustavi, 18, 163, 215
 Metoda tehničkog optimuma, 176, 189
 Mjereni signal, 161
 Mjerni član, 175
 Množenje varijable s konstantom, 34
 Mrtvo vrijeme, 185
 Nadvišenje, 154, 190, 194
 Nedeterministički sustavi, 14
 Nedominantna vremenska konstanta, 190
 Nekauzalni sustavi, 17
 Neprigušene oscilacije, 70
 Nule sustava, 36, 212
 Nyquistov dijagram, 88
 Amplitudno osiguranje, 143
 Fazno osiguranje, 143
 nestabilni sustava, 137
 Potpuni Nyquistov dijagram, 137
 stabilni sustava, 137
 sustav na rubu stabilnosti, 137
 Nyquistov dijagrami
 Član s transportnim kašnjenjem, 118
 D član, 113
 DT1 član, 114
 I član, 117
 P0 član, 99
 PT1 član, 101
 PT2 član, 103
 PT2S član, 107
 Nyquistov kriterij stabilnosti, 137
 Odziv, 7
 Otvoreni krug automatskog upravljanja, 142, 160, 191
 P regulator, 166, 178
 Parametri regulatora, 165
 Parametriranje regulatora, 175
 Partikularno rješenje, 23
 PD regulator, 173
 PI regulator, 168, 178, 188, 191, 205
 PID regulator, 170
 Pobuda, 7
 Pobude sustava

- Dirac, 25
- Rampa, 25
- Step, 25
- Pogreška slijeđenja, 157
- Pojačanje sustava, 185
- Pokazatelji kvalitete, 72, 153, 154
 - Nadvišenje, 72, 154
 - Vrijeme porasta, 72, 154
 - Vrijeme prvog maksimuma, 72, 154
 - Vrijeme ustaljivanja, 72, 154
- Pokazatelji kvalitete sustava, 212
- Polovi, 123
 - jednostruki, 122
 - konjugirano kompleksni, 122
 - realni, 122
 - višestruki, 122
- Polovi sustava, 36, 212
 - Dvostruki, 37
 - Kompleksni, 37
- Poremećajna veličina, 151, 161, 182
- Presječna frekvencija, 143, 147
- Prigušene oscilacije, 70
- Prijelazna funkcija, 33, 210
- Prijenosna funkcija, 162, 210
- Prirodna frekvencija sustava, 70
- Proporcionalni član drugog reda, 67
- Proporcionalni član drugog reda s prigušenim oscilatornim ponašanjem, 70
- Proporcionalni član nultog reda, 63
- Proporcionalni član prvog reda, 65
- PWM signal, 200
 - period, 201
- Racionalna funkcija, 36
- RC filtar, 38, 66
- Realni derivacijski član, 76
- Realni PID regulator, 172
- Referentna vrijednost signala, 161
- Regulacijska pogreška, 154, 161
- Regulacijsko odstupanje, 35, 151
- Regulator, 162, 165
 - derivacijska vremenska konstanta T_D , 170, 173
 - Derivacijsko ponašanje, 166
 - integralna vremenska konstanta T_I , 168, 170
 - Integralno ponašanje, 166
 - koeficijenta pojačanja K_R , 167, 168, 170, 173
 - P regulator, 166
 - PI regulator, 168
 - PID regulator, 170
 - Proporcionalno ponašanje, 165
 - Realni PID regulator, 172
- Rezonantna frekvencija, 156
- Rezonantno izdizanje, 156
- RLC filtar, 41
- RLC krug, 71
- Rotacijski sustav, 66, 71
- Routhov kriterij stabilnosti, 129
- Routhov kriterij stabilnosti, 125
- Rub stabilnosti, 176
- Senzor, 162, 175
 - akceleracije, 175
 - analogni, 175
 - digitalni, 175
 - pomaka, 175
 - temperature, 175
 - tlaka, 175
- Sinteza regulacijskog kruga, 162
- Slijedni sustavi, 151
- Slika periodične funkcije, 208
- Spremnik energije, 42
- Stabilnost sustava, 123
 - Granično stabilni sustavi, 123
 - Nestabilni sustavi, 123
 - Stabilni sustavi, 123
- Statički sustav, 163, 178
- Statičko pojačanje sustava, 164
- Stohastički sustavi, 14
- Sustav, 6
 - Deterministički sustavi, 7
 - Diskretni sustavi, 7
 - Kauzalni sustavi, 7
 - Kontinuirani sustavi, 7
 - Linearni sustav, 6
 - MIMO sustavi, 7

- Nedeterministički sustavi, 7
- Nekauzalni sustavi, 7
- Nelinearni sustav, 7
- SISO sustavi, 7
- Stohastički sustavi, 7
- Sustavi bez memorije, 7
- Sustavi s memorijom, 7
- Vremenski nepromjenjivi sustavi, 7
- Vremenski promjenjivi sustavi, 7
- Sustav upravljanja, 161, 163
- Sustavi bez memorije, 16
- Sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom (SISO), 15
- Sustavi s memorijom, 16
- Sustavi s više ulaza i više izlaza (MIMO), 15
- Svojstva Laplaceove transformacije
 - Deriviranje originala, 34
 - Deriviranje slike, 34
 - Integriranje originala, 34
 - Integriranje slike, 34
 - Linearnost Laplaceove transformacije, 33
 - Množenje varijable s konstantom, 34
 - Prigušenje originala, 34
 - Teorem o konačnoj vrijednosti, 35
 - Teorem o pomaku originala, 34
- Svojstva laplaceove transformacije
 - Deriviranje originala, 208
 - Deriviranje slike, 208
 - Integriranje originala, 208
 - Integriranje slike, 208
 - Linearnost Laplaceove transformacije, 207
 - Množenje varijable s konstantom, 207
 - Prigušenje originala, 207
 - Teorem o konačnoj vrijednosti, 208
 - Teorem o konvoluciji, 35, 208
 - Teorem o početnoj vrijednosti, 208
 - Teorem o pomaku originala, 207
- Tahogenerator, 66
- Težinska funkcija, 25, 33, 122, 210
- Tehnički optimum, 203
- Tehnički sustav, 6
- Teorem o konačnoj vrijednosti, 35, 208
- Teorem o konvoluciji, 35, 208
- Teorem o početnoj vrijednosti, 208
- Točnost slijeđenja vodeće veličine, 151
- Upravljački signal, 161
- Varijable stanja, 42
- Vlastita frekvencija sustava, 153
- Vremenski nepromjenjivi sustavi, 10
- Vremenski promjenjivi sustavi, 11
- Vrijeme porasta, 154, 185
- Vrijeme prvog maksimuma, 154
- Vrijeme ustaljivanja, 154
- Vrijeme zadržavanja, 185
- Zahtjevi sinteze sustava automatskog upravljanja
 - Zahtjevi na pogrešku slijeđenja, 152, 157
 - Zahtjevi u frekvencijskom području, 152, 156
 - Zahtjevi u vremenskom području, 152, 153
- Zatvoreni krug automatskog upravljanja, 142, 160, 191
- Ziegler-Nicolsova metoda parametriranja regulatora, 176
 - Metoda prijelazne funkcije, 176, 184
 - Metoda ruba stabilnosti, 176



www.vtsbj.hr